EXAMEN DE ANÁLISIS

1º) Dada la función $f(x) = 2 - x^2 . e^{-x}$

a) Halla los máximos y mínimos relativos. (1p)
b) Calcula las asíntotas, si existen. (1p)

2º) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle (1p). Comprueba que la ecuación $senx = x^2 - 1$ tiene al menos una solución.(1p)

3º) Define el concepto de función continua en un punto(0.25p). Determina los valores de a, b, c para que la función: $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ pase por el punto A=(2,8) , tenga un mínimo relativo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y la recta tangente a dicha función en x=1 tenga pendiente 4 (1.5p). Calcula también la recta normal a f(x) en x=1. (0.25p)

4º) Calcular los límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ (1p)

b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + cosx\right)^{\frac{1}{cosx}}$ (1p)

5º) Enuncia el Teorema de Lagrange (0.5p). Estudia la continuidad y la derivabilidad de:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k+x}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ e^x + p & si\ x > 0 \end{cases}$$ (1.5p)

1º) $f(x) = 2 - x^2 \cdot e^{-x}$

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 - [+2x e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} (-1)] = 0 \Leftrightarrow -2xe^{-x} + x^2 e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} \cdot (-2x + x^2) = 0 \rightarrow -2x + x^2 = 0 \begin{cases} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow x = 2. \end{cases}$

$f''(x) = (-2xe^{-x} + x^2 e^{-x})' = -2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x} (-2 + 4x - x^2)$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ En $x = 0$ hay máximo.

$f''(2) = e^{-2} \cdot 2 > 0 \Rightarrow$ En $x = 2$ hay mínimo.

b) A.V. $\quad x = a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} (2 - x^2 e^{-x}) = \pm\infty$ No existen.

A.O: $\quad y = \lim_{x \to \infty} (2 - x^2 e^{-x}) = \lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{x^2}{e^x}\right) = 2 - \frac{\infty}{\infty}$.

Calculamos $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2}$

No hay oblicuas.

2º) Comprobamos que $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tiene al menos una solución: Sea $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + 1$. que es continua en $\mathbb{R}$.

$f(0) = 1$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < 0$

. Aplicando el teorema de Bolzano a $f(x)$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$: existe $c \in (0, \frac{\pi}{2}) / f(c) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ existe $c \in (0, \frac{\pi}{2})$: $\operatorname{sen} c - c^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} c = c^2 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ existe $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ solución de la ecuación $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$.

3) $f(x) = ax^3 + bx + c$ pasa por $A = (2,8) \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c = 8 \Rightarrow \boxed{8a + 2b + c = 8}$

Mínimo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$: $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + b = 0 \Rightarrow 3a \cdot \frac{3}{9} + b = 0 \Rightarrow \boxed{a + b = 0}$

Recta tangente en $x = 1$ tiene pendiente $4 \Leftrightarrow f'(1) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(1) = \boxed{3a + b = 4}$

Luego: $\left.\begin{array}{l} 6a + b = 4 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \end{array}} \Rightarrow 8 - 4 + c = 8 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

Recta normal: La recta tangente es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 3 = 4 \cdot (x - 1) \Rightarrow$ La recta normal es $y - 3 = -\frac{1}{4} \cdot (x - 1)$

4º) a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} \overset{\frac{0}{0}\ L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 16x + 7}{2x - 1} = -7$

b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^\infty \Rightarrow$ L'H: $e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x - 1\right)\right]}$

$= e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2x}{\pi} + \cos x - 1}{\cos x}} \overset{\frac{0}{0}\ L'H}{=} e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2}{\pi} - \operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen} x}} = e^{\frac{\frac{2}{\pi} - 1}{-1}} = \boxed{e^{\frac{2 - \pi}{-\pi}}}$

5º) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k+x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + p & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Para $x \neq 0$ $f(x)$ es continua y derivable por ser suma y cociente de derivables y $x-1 \neq 0$ si $x \leq 0$.

Para $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (e^x + p) = 1+p \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{k+x}{x-1}\right) = \dfrac{k}{-1} \\ f(0) = \dfrac{k}{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{1+p=-k}$$

para que sea continua en $x=0$

Para $x \neq 0$: $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1-k}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \dfrac{-1-k}{1} = -1-k \\ f'(0^+) = e^0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-1-k=1}$$

para que sea derivable en $x=0$.

Resolvemos: $\left.\begin{array}{l} 1+p=-k \\ -1-k=1 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} p=1 \\ k=-2 \end{array}\right.$

Luego si $p=1$ y $k=-2$ $f(x)$ es continua y derivable en $x=0$. $\Rightarrow$ Si $k=-2$ y $p=1 \to f(x)$ es continua y derivable.

$\to$ Si $k \neq -2$ ó $p \neq 1 \to f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.