ESTUDIO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

- Crecimiento y decrecimiento.
- Extremos absolutos y relativos.
- Concavidad y convexidad.
- Asíntotas.
- Dibujo de la curva $y = f(x)$.

1. Crecimiento y decrecimiento

i) Una función $y = f(x)$ definida en (a, b) es *creciente en* $x_0 \in (a,b)$ si existe un entorno de x_0, $E(x_0,\varepsilon)$, en el cual se cumple:

$$\forall x_1, x_2 \in E(x_0,\varepsilon) \quad / \quad x_1 < x_0 < x_2 \quad , \quad f(x_1) \le f(x_0) \le f(x_2).$$

ii) Una función $y = f(x)$ definida en (a, b) es *decreciente en* $x_0 \in (a,b)$ si existe un entorno de x_0, $E(x_0,\varepsilon)$, en el cual se cumple:

$$\forall x_1, x_2 \in E(x_0,\varepsilon) \quad / \quad x_1 < x_0 < x_2 \quad , \quad f(x_1) \ge f(x_0) \ge f(x_2).$$

iii) Una función $y = f(x)$ definida en (a, b) es *estrictamente creciente en* $x_0 \in (a,b)$ si existe un entorno de x_0, $E(x_0,\varepsilon)$, en el cual se cumple:

$$\forall x_1, x_2 \in E(x_0,\varepsilon) \quad / \quad x_1 < x_0 < x_2 \quad , \quad f(x_1) < f(x_0) < f(x_2).$$

iv) Una función $y = f(x)$ definida en (a, b) es *estrictamente* de*creciente en* $x_0 \in (a,b)$ si existe un entorno de x_0, $E(x_0,\varepsilon)$, en el cual se cumple:

$$\forall x_1, x_2 \in E(x_0,\varepsilon) \quad / \quad x_1 < x_0 < x_2 \quad , \quad f(x_1) > f(x_0) > f(x_2).$$

El ser creciente o decreciente está estrechamente relacionado con el signo de la derivada f ‘. Si la gráfica de la función tiene sólo tangentes con pendientes positivas en *I*, la gráfica se elevará y *f* será creciente en *I*. Del mismo modo, si las tangentes tienen pendientes negativas, es lógico pensar que la función decrecerá. El siguiente teorema expresa esta idea formalmente.

Teorema. Sea *f* derivable en el punto x_0. Se cumple:

i) Si $f'(x_0) > 0$ entonces *f* es estrictamente creciente en x_0.

ii) Si $f'(x_0) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en x_0.

De dicho resultado se deduce:

Sea *f* una función derivable en el punto x_0. Se cumple:

i) Si *f* es creciente en x_0, entonces $f'(x_0) \ge 0$.

ii) Si *f* es decreciente en x_0, entonces $f'(x_0) \le 0$.

2. Extremos absolutos y relativos

Sea f definida en D y $x_0 \in D$:

i) $f(x_0)$ es el *máximo absoluto de f en D* si $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in D$.
ii) $f(x_0)$ es el *mínimo absoluto de f en D* si $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in D$.

Los valores máximo y mínimo absolutos de f en un intervalo I se denominan *valores extremos* o *extremos absolutos* de f en I. No toda función posee extremos en un intervalo. Por otro lado, el valor máximo o mínimo puede alcanzarse en más de un punto. En la mayor parte de los problemas prácticos de optimización, el objetivo es hallar el máximo o mínimo absoluto de una función dada en algún intervalo.

Recordemos que según el teorema de Weierstrass **una función continua en un intervalo cerrado y acotado [*a*, *b*] alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos.**

Sea f definida en D y $x_0 \in D$:

i) f tiene un *máximo relativo en* x_0 si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x de un entorno de x_0. El máximo relativo es $f(x_0)$.
ii) f tiene un *mínimo relativo en* x_0 si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x de un entorno de x_0. El mínimo relativo es $f(x_0)$.

Los máximos y mínimos relativos son los *extremos relativos* de la función. Es evidente que todo máximo absoluto es máximo relativo, y todo mínimo absoluto es mínimo relativo. En consecuencia, localizando los extremos relativos, entre ellos estarán los absolutos.

Veremos a continuación cómo localizar los posibles extremos relativos de una función.

Teorema (Condición necesaria de extremo). Si una función f tiene un extremo relativo en un punto x_0, y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Esto nos lleva al concepto de valor crítico. Si f está definida en x_0 y $f'(x_0) = 0$, se dice que x_0 es un *valor crítico* de f y el punto $(x_0, f(x_0))$ es un *punto crítico*. Si no existe $f'(x_0)$ se dice que $(x_0, f(x_0))$ es *punto singular*. Por ejemplo, son puntos singulares los puntos angulosos y los extremos de un intervalo cerrado que sea parte del dominio de la función.

Por tanto, **los puntos candidatos a ser extremos relativos son los puntos críticos, y los puntos singulares**. Pero este teorema no dice que en cada valor crítico se deba alcanzar un extremo relativo. Un ejemplo ilustrativo es la función $y = x^3$: $x = 0$ es un valor crítico y sin embargo, no es extremo de la función. De hecho, su gráfica crece indefinidamente a lo largo de todo su dominio.

Se verá a continuación cómo decidir si un punto crítico o singular es o no extremo relativo. Damos a continuación varios criterios para ello:

Teorema (*Criterio de la primera derivada para extremos relativos*). Sea $y = f(x)$ una función continua en D, y sea x_0 un punto crítico o punto singular de f.

i) Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + r)$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es máximo relativo de f.

ii) Si $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + r)$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es mínimo relativo de f.

iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}$, entonces $(x_0, f(x_0))$ no es extremo relativo de f.

Este resultado se deduce rápidamente gracias a la relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función.

Teorema (Criterio de la segunda derivada). Sea $y = f(x)$ tal que $f'(x_0) = 0$ y existe $f''(x)$ en un entorno $E(x_0, r)$.

i) Si $f''(x_0) > 0$, f posee un mínimo relativo en x_0.

ii) Si $f''(x_0) < 0$, f posee un máximo relativo en x_0.

iii) Si $f''(x_0) = 0$, no obtenemos ninguna información de la función.

El Criterio de la segunda derivada sólo es aplicable al estudio de puntos que anulan a f'. El Criterio de la primera derivada se puede aplicar también a puntos singulares, incluidos los extremos de intervalos cerrados del dominio de la función.

Para determinar los extremos absolutos de una función f, se determinan sus extremos relativos (incluidos los extremos de intervalos cerrados o semicerrados del dominio), y se comparan los valores de sus imágenes. El mayor valor es el máximo absoluto de f en $[a, b]$. El menor valor es el mínimo absoluto de f en $[a, b]$.

3. Concavidad y convexidad

Saber si una curva es creciente o decreciente proporciona sólo una visión parcial. Es necesario conocer cómo crece una función, es decir, determinar si es cóncava o convexa.

Sea f una función derivable en un punto x_0. Se dice que f es *cóncava* (*hacia arriba*) en x_0 si existe un entorno $E(x_0, r)$ de x_0 donde la gráfica de f está por encima de la gráfica de la recta tangente a f en $(x_0, f(x_0))$, es decir si

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \forall x \in E(x_0, r)$$

De forma semejante se define el concepto de convexidad (o concavidad hacia abajo). La función *f*, derivable en x_0 se dice que es *convexa* en x_0 (o *cóncava hacia abajo* en x_0) si existe un entorno $E(x_0, r)$ donde la gráfica de *f* está por debajo de la gráfica de la tangente a *f* en $(x_0, f(x_0))$, es decir si

$$f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in E(x_0, r)$$

El significado geométrico de estos conceptos es que la gráfica de una función "se dobla hacia arriba" donde *f* es cóncava, y "se dobla hacia abajo" donde *f* es convexa. Por lo tanto, donde una función f es cóncava, la pendiente de la tangente aumenta, es decir, la derivada $f'(x)$ es creciente, y donde *f* es convexa, la pendiente de la tangente disminuye, y así $f'(x)$ es decreciente.

Por lo tanto, para determinar dónde una función es cóncava y dónde es convexa, basta averiguar dónde es $f'(x)$ creciente y dónde decreciente, lo que podremos averiguar mediante el signo de la derivada de $f'(x)$ (si esta existe), es decir, a través del signo de la derivada segunda de $f(x)$. **Donde la derivada segunda $f''(x)$ sea positiva, la función f será cóncava, y donde $f''(x)$ sea negativa, la función f será convexa**. Cuando la derivada segunda se anule, se deberán investigar las derivadas de orden superior.

Los puntos que separan intervalos de concavidad de intervalos de convexidad de una función, son puntos donde la derivada segunda, si existe y es continua, deberá ser cero. En ellos la tangente atraviesa la gráfica de la función, esto es, a un lado está la gráfica de *f* por encima de la tangente, y por el otro lado está por debajo de la tangente. A estos puntos se les llama *puntos de inflexión de f* y corresponden a los extremos relativos de la derivada primera.

Por tanto, sea x_0 tal que $f''(x) = 0$ o no existe.

- $(x_0, f(x_0))$ es punto de inflexión si $f''(x_0) > 0$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f''(x_0) < 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + r)$.
- $(x_0, f(x_0))$ es punto de inflexión si $f''(x_0) < 0$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0)$ y $f''(x_0) > 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + r)$.

Para determinar el crecimiento y decrecimiento de una función hemos recurrido al signo de la derivada primera. De la misma forma, para determinar la concavidad y la convexidad, hemos utilizado el signo de la derivada segunda. Cuando estas derivadas se anulan no tenemos información suficiente para determinar estas características. Disponemos de resultados que se basan en el signo de las derivadas sucesivas de la función.

Teorema. Supongamos que en un entorno de x_0, f admite derivadas sucesivas continuas hasta el orden n, tales que $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ siendo $f^{(n)}(x_0)$ la primera derivada no nula en x_0:

i) si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en x_0

ii) si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en x_0.

iii) si n es impar y $f^{(n)}(x_0) > 0$, f es estrictamente creciente en x_0

iv) si n es impar y $f^{(n)}(x_0) < 0$, f es estrictamente decreciente en x_0.

Teorema. Si f es una función que en un entorno de x_0 admite derivadas sucesivas continuas hasta el orden n, y es tal que

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ y } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

entonces:

i) si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, f es cóncava en x_0

ii) si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, f es convexa en x_0

iii) si n es impar, f tiene un punto de inflexión en x_0.

4. Asíntotas

Dada la curva $y = f(x)$, una *asíntota* es una recta tal que la distancia desde un punto P de la curva a la recta tiende a cero cuando P se aleja indefinidamente sobre una rama infinita de la curva. Se distingue entre asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

i) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$, $k \in IR$, la recta $y = k$ es una *asíntota horizontal*.

ii) Si $\lim_{x\to k^+} f(x) = \infty$, $k \in IR$ o $\lim_{x\to k^-} f(x) = \infty, k \in IR$, la recta $x = k$ es una *asíntota vertical*.

iii) Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, $m \neq 0$, $m < \infty$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$, $n < \infty$, $y = mx + n$ es *asíntota oblicua*.

5. Dibujo de la curva $y=f(x)$

A modo de resumen se muestran los aspectos a analizar para determinar la curva $y = f(x)$.

- Dominio de la función f.
- Existencia de simetrías. Una función f se dice que es *par* si $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D_f$, en cuyo caso su gráfica es simétrica respecto del eje OY. Se dice que f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D_f$, en cuyo caso la gráfica de f es simétrica respecto del origen O.
- Puntos de corte con los ejes OX y OY.
- Asíntotas.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
  Para cada valor crítico o singular x_0 se tiene:

$x < x_0$ $\qquad$ $x > x_0$

$f'(x) > 0$ $\qquad$ $f'(x) < 0$

f creciente $\qquad$ *f* decreciente

f tiene en x_0 un máximo relativo

Si para x_0 se tiene:

$x < x_0$ $\qquad$ $x > x_0$

$f'(x) < 0$ $\qquad$ $f'(x) > 0$

f decreciente $\qquad$ *f* creciente

f tiene en x_0 un mínimo relativo

- Intervalos de convexidad y concavidad y puntos de inflexión. Tomamos los puntos x_0 tales que $f''(x_0) = 0$ o donde no existe $f''(x_0)$:

Si tenemos:

$x < x_0$ $\qquad$ $x > x_0$

$f''(x) > 0$ $\qquad$ $f''(x) < 0$

f cóncava $\qquad$ *f* convexa

f tiene en x_0 un punto de inflexión (si $x_0 \in D_f$)

Si tenemos:

$x < x_0$ $\qquad$ $x > x_0$

$f''(x) < 0$ $\qquad$ $f''(x) > 0$

f convexa $\qquad$ *f* cóncava

f tiene en x_0 un punto de inflexión (si $x_0 \in D_f$)