ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (intervalos de confianza)	NOMBRE: ______________________	CDG: 4

1.- Se supone, que la calificación en Matemáticas obtenida por los alumnos de una cierta clase, es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 1'5\ puntos$. Se elige una muestra aleatoria de tamaño 10 y se obtiene una suma de sus calificaciones igual a $59'5\ puntos$.

a) Determínese un intervalo de confianza al 95% , para la calificación media de la clase.

b) ¿Qué tamaño ha de tener la muestra, para que el error máximo de la estimación sea de $0'5\ puntos$, con un nivel de confianza del 95%?

2.- Se supone que el tiempo de vida útil en miles de horas (Mh) de un cierto modelo de televisión, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a $\sigma = 0'5\ Mh$. Para una muestra aleatoria simple de 4 televisores de dicho modelo, se obtiene una media muestral de $\bar{x} = 19'84\ Mh$ de vida útil.

a) Hállese un intervalo de confianza al 95% para el tiempo de vida útil medio de los televisores.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto del error de la estimación de la media poblacional mediante la media muestral sea inferior a $0'2\ Mh$ con probabilidad mayor o igual que $0'95$.

3- En un laboratorio se obtuvieron seis determinaciones del pH de una solución con los siguientes resultados: $7'91,\ 7'94,\ 7'90,\ 7'93,\ 7'89\ y\ 7'91$. Se supone que la población de todas las determinaciones del pH de la solución tiene una distribución normal de media desconocida con desviación típica igual a $\sigma = 0'02$.

a) Determínese un intervalo de confianza al 98% para la media μ de todas las determinaciones del pH de la misma solución, obtenidas con el mismo método.

b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea a la sumo de $0'02$?.

4.- Se han elegido al azar 10 televisores de un taller de electrónica y se han anotado el número de *horas* que se han necesitado para su reparación. Los resultados han sido los siguientes:

7 5 8 2 4 7 4 1 6 6

Se supone que el número de horas de reparación de este tipo de televisores es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 1'5\ horas$.

a) Determínese el intervalo de confianza del 90% para el tiempo medio de reparación.

b) ¿Qué tamaño debe tener una muestra para que el error máximo de estimación sea de $0'5\ horas$ con el mismo nivel de confianza?.

5.- Se ha extraído una muestra de 145 alumnos de una escuela de artes, a los que se les ha propuesto un test de habilidad. La media y la desviación típica obtenida de la muestra son $\overline{x} = 82$ y $\hat{s} = 14$, respectivamente. A partir de estos datos, calcular el intervalo en el cual se hallará la media de la población con un nivel de confianza del 99%.

CDG: 4

(1) a) X: calificación Matemáticas (puntos) $\rightarrow N(\mu, 1'5)$

muestra $n=10$ — $\bar{X} = \frac{59'5}{10} = 5'95$

Al ser la distribución de partida normal, la distribución de las medias muestrales también lo es, y le corresponde un intervalo de confianza para la media de la población μ de: $IC = \left(\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$1-\alpha = 0'95 \longrightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

$IC = \left(5'95 \pm 1'96 \frac{1'5}{\sqrt{10}}\right) = (5'95 \pm 0'93) = \boxed{(5'02, 6'88)}$

se encuentra μ con una probabilidad del 95%

b) $E = 0'5$ ptos $\quad E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0'5 \quad ; \quad 1'96 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{n}} \leq 0'5 \quad ; \quad \sqrt{n} \geq \frac{1'96 \cdot 1'5}{0'5}$

$\sqrt{n} \geq 5'88, \quad n \geq 34'57 \longrightarrow \boxed{n = 35}$

---

(2) a) X: tiempo vida útil TV (Mh) $\longrightarrow \boxed{N(\mu, 0'5)}$

muestra $n = 4$ — $\bar{X} = 19'84$ Mh

Al ser la distribución de las X normal, la distribución de las medias muestrales es una normal perfecta y le corresponde un intervalo de confianza para la μ igual a $IC = \left(\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$1-\alpha = 0'95 \longrightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

$IC = \left(19'84 \pm 1'96 \cdot \frac{0'5}{\sqrt{4}}\right) = (19'84 \pm 0'49) = \boxed{(19'35, 20'33)}$

b) $|\bar{X} - \mu| < 0'2 \qquad z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0'2 \; ; \; 1'96 \cdot \frac{0'5}{\sqrt{n}} < 0'2$

$\bar{X} - \mu = \text{Error} \qquad \sqrt{n} > \frac{1'96 \cdot 0'5}{0'2} \; ; \; \sqrt{n} > 4'9 \; ; \; n > 24'01$

$\boxed{n = 25}$

3 X: determinaciones de PH $\longrightarrow N(\mu, 0'02)$

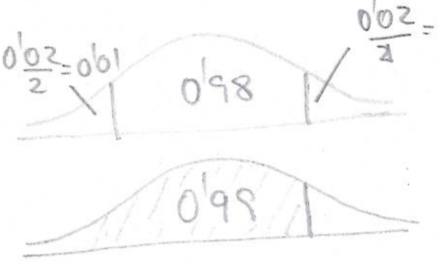
a)

muestra $n=6$ — $\bar{X} = \dfrac{7'91+7'94+7'90+7'93+7'89+7'91}{6} = 7'91\hat{3}$

Al ser normal la distribución X, también lo es la distribución de las medias muestrales, le corresponde un intervalo de confianza para la media de la población de $IC = \left(\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$1-\alpha = 0'98 \longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0'01$

$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0'99 \longrightarrow \boxed{z_{\alpha/2} = 2'33}$



$IC = \left(7'91\hat{3} \pm 2'33 \dfrac{0'02}{\sqrt{6}}\right) = (7'91\hat{3} \pm 0'019) = \boxed{(7'89,\ 7'93)}$

b) amplitud del intervalo $\longrightarrow 2E$ $\quad 2E = 0'02 \longrightarrow E = 0'01$

$E = z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $0'01 \geq 2'33 \dfrac{0'02}{\sqrt{n}}$; $\sqrt{n} \geq \dfrac{2'33 \cdot 0'02}{0'01}$

$\sqrt{n} \geq 4'66$; $n \geq 21'7 \longrightarrow \boxed{n = 22}$

*

4 X: reparación de TV (horas) $\longrightarrow N(\mu, 1'5)$

a) muestra $n=10$ — $\bar{X} = \dfrac{7+5+8+2+4+7+4+1+6+6}{10} = 5$

$\bar{X} = 5$ horas

Al ser la distribución de partida X una distribución normal, la distribución $\bar{X}$ de las medias muestrales también lo es, le corresponde un intervalo de confianza para la media poblacional $IC = \left(\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$IC = \left(5 \pm 1'645 \frac{1'5}{\sqrt{10}}\right) = (5 \pm 0'78) = \boxed{(4'22, 5'78)}$$

$1-\alpha = 0'9 \longrightarrow z_{\alpha/2} = 1'645$

Se encuentra μ con una probabilidad del 90%

b) $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $E = 0'5$; $0'5 = 1'645 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{n}}$; $\sqrt{n} = \frac{1'645 \cdot 1'5}{0'5}$

$\sqrt{n} = 4'935$; $n = 24'35 \longrightarrow \boxed{n = 25}$

*

5 muestra $n=145$ — $\begin{cases} \bar{X} = 82 \\ \hat{S} = 14 \end{cases}$

Al ser $n \geq 30$, la distribución de las medias muestrales $\bar{X}$ es normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Como σ es desconocida, pero $n \geq 30$, la estimamos mediante $\hat{S}$. A la media poblacional "μ" le corresponde por lo tanto un intervalo de confianza igual a $IC = \left(\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right)$

$1-\alpha = 0'99 \longrightarrow z_{\alpha/2} = 2'575$

Se encuentra μ con una probabilidad del 99%

$$IC = \left(82 \pm 2'575 \cdot \frac{14}{\sqrt{145}}\right) = (82 \pm 3) = \boxed{(79, 85)}$$