Examen Tema 1. Matrices y Determinantes

Instrucciones para el examen:

- Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
- **CALIFICACIÓN:** Cada ejercicio tiene una puntuación diferentes y en el enunciado se especifica la valoración de cada apartado. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
- **TIEMPO:** 50 minutos.
- Aunque utilices calculadora, muestra claramente los pasos y tu conocimiento de los conceptos y las fórmulas matemáticas que se están aplicando.
- Evita el uso de decimales. Expresa los resultados en forma de fracciones y radicales. En caso de tener que usarlos, redondea a la centésima.
- Sé claro/a, limpio/a, ordenado/a y cuida la ortografía. No se corregirá lo que no se entienda claramente.

1. (4 puntos) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro real a:

a) (1 puntos) Determínese los valores de a para los que la matriz A es invertible.

b) (1 punto) Para $a = 1$, despéjese y determínese la matriz de X de la ecuación matricial $A \cdot X = A + 2Id$, donde Id representa la matriz identidad de orden 3.

c) (2 puntos) Calcula la matriz $B=A+I$ y averigua el valor de B^{11}.

---

2. (3 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1'5 puntos). Hallar las condiciones que deben cumplir a, b y c, para que se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$.

b) (1'5 puntos). Para $a = b = c = 1$, calcular las cuatro primeras potencias de B, y conjeturar una fórmula para B^n

---

3. (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices que conmuten o permuten con ella.

RESOLUCIÓN

1. (4 puntos) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro real a:

a) (1 puntos) Determínese los valores de a para los que la matriz A es invertible.

b) (1 punto) Para $a = 1$, despéjese y determínese la matriz de X de la ecuación matricial $A \cdot X = A+2Id$, donde Id representa la matriz identidad de orden 3.

c) (2 puntos) Para $a = 1$ calcula la matriz $B = A + I$ y averigua el valor de B^{11}.

SOLUCIÓN:

a) Ver que A sea invertible equivale a ver qué valores de a hacen que el determinante no se anule.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = a^3 + a^3 = 2a^3;\ |A| = 2a^3 = 0 \leftrightarrow a = 0$$

Por tanto, para cualquier $a \neq 0$ la matriz A es invertible.

b) $AX = A + 2Id \rightarrow X = A^{-1}(A + 2I)$

Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Primero calculamos su determinante $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$

Después la matriz adjunta:

$\boldsymbol{A_{11}} = +\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -\mathbf{1}$ $\quad \boldsymbol{A_{12}} = -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{1}$ $\quad \boldsymbol{A_{13}} = +\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{A_{21}} = -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{1}$ $\quad \boldsymbol{A_{22}} = +\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -\mathbf{1}$ $\quad \boldsymbol{A_{23}} = -\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{A_{31}} = +\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{1}$ $\quad \boldsymbol{A_{32}} = -\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{1}$ $\quad \boldsymbol{A_{33}} = +\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -\mathbf{1}$

Por tanto, $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$

Y por último trasponemos la matriz adjunta y dividimos por el determinante:

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para terminar de resolver la ecuación, calculamos la otra matriz involucrada y las multiplicamos:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \mathrm{A}^{-1}(A + 2I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

También podíamos haber desarrollado el paréntesis y hacer operaciones más sencillas:

$$X = A^{-1}(A + 2I) = A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot 2I = I + 2A^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¡En ambos casos observamos que la X=A!

c) $B = A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si calculamos sus primeras potencias:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$
$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix}$$

Observamos que podemos conjeturar una fórmula para n: $B^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

Así que para *n = 11* la matriz quedará $B^{11} = \begin{pmatrix} 3^{10} & 3^{10} & 3^{10} \\ 3^{10} & 3^{10} & 3^{10} \\ 3^{10} & 3^{10} & 3^{10} \end{pmatrix}$

---

2. **(3 puntos)** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1'5 puntos). Hallar las condiciones que deben cumplir a, b y c, para que se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$.

b) (1'5 puntos). Para $a = b = c = 1$, calcular las cuatro primeras potencias de B, y conjeturar una fórmula para B^n

a) $A \cdot B = B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2c & 2c+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{5a}+2c = \cancel{5a}+2b \rightarrow \cancel{2}c = \cancel{2}b \; ; \; c = b$

$\cancel{5b}+2c = 2a+\cancel{5b} \rightarrow \cancel{2}c = \cancel{2}a \; ; \; c = a$

$2a+\cancel{5c} = \cancel{5c}+2c \rightarrow \cancel{2}a = \cancel{2}c \; ; \; a = c$

$2b+\cancel{5c} = 2c+\cancel{5c} \rightarrow \cancel{2}b = \cancel{2}c \; ; \; b = c$

$\boxed{a = b = c}$

condición pedida

b) Si $a = b = c = 1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2^0

$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2^1

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2^2

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2^3

$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^1 = 1 = 2^0$

$B^2 = 2 = 2^1$

$B^3 = 4 = 2^2$

$B^4 = 8 = 2^3$

$\vdots$

$B^n = 2^{n-1}$

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. **(2 puntos)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices que conmuten o permuten con ella.

SOLUCIÓN:

Hay que resolver la ecuación $AX = XA$ donde $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Por tanto $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x+2y \\ z+t & z+2t \end{pmatrix}$

Al igualar y resolver los sistemas correspondientes:

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z = x+y \rightarrow z = y \\ x+2z = z+t \rightarrow t = x+z = x+y \\ y+t = x+2y \rightarrow t = x+y \\ y+2t = z+2t \rightarrow y = z \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son todas las matrices de la forma:

Soluciones = $\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x+y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$