Julio 2018. Extraordinaria. Problema 3A.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la función real de variable real: $f(x)=\dfrac{x}{1-4x^2}$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Solución.

a. La monotonía de una función (crecimiento y decrecimiento), se asocia al signo de la primera derivada:

$$\begin{array}{ll}\text{Si} \quad f'(x)>0 & f(x)\,\text{es creciente}\\ \text{Si} \quad f'(x)<0 & f(x)\,\text{es decreciente}\end{array}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(1-4x^2\right)-x\cdot(-8x)}{\left(1-4x^2\right)^2}=\frac{1+4x^2}{\left(1-4x^2\right)^2}$$

Para estudiar el signo de la derivada se calculan los ceros y los polos de la derivada.

Ceros ≡ valores de la variable que anulan la función, son los ceros del numerador

Polos ≡ valores de la variable que hacen que la función valga infinito, son los ceros del denominador

$$\text{Ceros}: \quad 1+4x^2=0 \qquad x=\pm\sqrt{-\frac{1}{4}}\notin R$$

$$\text{Polos}: \quad \left(1-4x^2\right)^2=0 \quad 1-4x^2=0: x=\pm\frac{1}{2}$$

Conocidos los polos, se estudia el signo de la derivada en los diferentes intervalos que generan:

$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
-1	0	1
$f'(x)>0$	$f'(x)>0$	$f'(x)>0$
f(x) creciente	f(x) creciente	f(x) creciente

$$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right) \quad f'(x)>0\Rightarrow f(x)\ \text{es creciente}$$

Junio 2018. Problema 2B.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$$

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución.

b. La monotonía de una función (crecimiento y decrecimiento), se asocia al signo de la primera derivada:

$$\begin{array}{ll}\text{Si} \quad f'(x)>0 & f(x)\,\text{es creciente}\\ \text{Si} \quad f'(x)<0 & f(x)\,\text{es decreciente}\end{array}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x+1)^2-x^3\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{\left((x+1)^2\right)^2}=\frac{(x+1)\cdot\left(3x^2\cdot(x+1)-2x^3\right)}{(x+1)^4}=\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}$$

Para estudiar el signo de la derivada se calculan los ceros y los polos de la derivada.

Ceros ≡ valores de la variable que anulan la función, son los ceros del numerador

Polos ≡ valores de la variable que hacen que la función valga infinito, son los ceros del denominador

$$\text{Ceros}: \quad x^3+3x^2=0 \quad x^2\cdot(x+3)=0: \begin{cases} x=0\\ x=-3\end{cases}$$

$$\text{Polos}: \quad (x+1)^3=0 \qquad x+1=0: x=-1$$

Conocidos los cero y los polos, se estudia el signo de la derivada en los diferentes intervalos que generan estos:

(–∞, –3)	**(–3, –1)**	**(–1, 0)**	**(0, +∞)**
–4	–2	–0'5	1
$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$	$f'(x)>0$
f(x) creciente	f(x) decreciente	f(x) creciente	f(x) creciente

- $(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$ $f(x)$ es creciente
- $(-3,-1)$ $f(x)$ es decreciente

Modelo 2018. Problema 2B.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{3x^2+3}{x}$

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución.

b. La monotonía de la función se asocia al signo de la primera derivada:

$$\text{Si}\quad f'(x)<0 \;\Rightarrow\; f(x)\,\text{es decreciente}$$

$$\text{Si}\quad f'(x)>0 \;\Rightarrow\; f(x)\,\text{es creciente}$$

$$f'(x)=\frac{6x\cdot x-\left(3x^2+3\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{3x^2-3}{x^2}=\frac{3(x+1)(x-1)}{x^2}$$

Teniendo en cuenta los ceros (±1) y los polos (0) de la derivada:

	(–∞, –1)	(–1, 0)	(0, 1)	(1, +∞)
Signo de $f'(x)$	+	–	–	+
Monotonía de f(x)	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)f(x)$ es creciente

$(-1,0)\cup(0,1)f(x)$ es decreciente

Septiembre 2017. Problema 3B.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 + ax$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función f (x) tenga un extremo relativo en x = 2. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.

Solución.

a. Para que la función tenga un extremo relativo en x = 2, se debe cumplir que $f'(2)=0$ y $f''(2)\neq 0$, con el siguiente criterio:

- Si $f''(2)>0$ en el punto (2, f(2)) la función presenta un mínimo relativo.
- Si $f''(2)<0$ en el punto (2, f(2)) la función presenta un máximo relativo.

$$f'(x)=2x+a \qquad f'(2)=2\cdot 2+a=4+a \qquad 4+a=0 \qquad a=-4$$

$f''(x)=2>0$ En el punto (2, f(2)) la función f(x) = x^2 + 4x tiene un mínimo relativo

Septiembre 2017. Problema 2B.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^2-1}{3x-2}$$

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución.

b. Monotonía (crecimiento y decrecimiento). Se asocia al signo de la derivada, en los puntos donde la derivada es positiva, la función es creciente, donde es negativa es decreciente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(3x-2)-\left(x^2-1\right)\cdot 3}{(3x-2)^2}=\frac{6x^2-4x-3x^2+3}{(3x-2)^2}=\frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}$$

Se buscan los ceros de la derivada:

$$f'(x)=0;\ \frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}=0;\ 3x^2-4x+3=0;\ x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 6}=\frac{4\pm\sqrt{-32}}{12}\notin R$$

Al no tener ceros la derivada, solo se estudian los intervalos que genera el dominio de la función.

$$\text{si } x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\quad f'(x)>0\quad f(x)\text{es creciente}$$

$$\text{si } x\in\left(\frac{2}{3},+\infty\right)\quad f'(x)>0\quad f(x)\text{es creciente}$$

La función es estrictamente creciente en su dominio de definición.

Septiembre 2017. Problema 3A.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2+x-2 & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$$

b) Para a = 2, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución.

b. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2+x-2 & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$

- Puntos de corte: f(x) = 2x + 1 en el intervalo (–∞, –1) no corta a los ejes coordenados.

$$f(x)=x^2+x-2=0 : x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\begin{cases} =-2\notin[-1,+\infty) \\ =1\in[-1,+\infty) \end{cases}$$

La función corta al eje OX en el punto (1, 0)

Punto de corte con OY: $y=f(0)=0^2+0-2=-2$ (0, –2)

- Monotonia. Se asocia al signo de la derivada, en los puntos donde la derivada es positiva, la función es creciente, donde es negativa es decreciente.

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<-1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases} : \begin{cases} \text{Si } x\in(-\infty,-1) & f'(x)>0 & f(x)\text{es creciente} \\ \text{Si } x\in(-1,-1/2) & f'(x)<0 & f(x)\text{es decreciente} \\ \text{Si } x\in(-1/2,+\infty) & f'(x)>0 & f(x)\text{es creciente} \end{cases}$$

Junio 2017. Problema 2B.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x)=x^3-3x$$

b) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x).

Solución.

b. La monotonía de una función se asocia al signo de la primera derivada: $\begin{cases} \text{Si } f'(x)>0\Rightarrow f(x)\text{creciente} \\ \text{Si } f'(x)<0\Rightarrow f(x)\text{decreciente} \end{cases}$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1);\begin{cases} \text{Si} & x\in(-\infty,-1) & f'(x)>0 & f(x)\text{creciente} \\ \text{Si} & x\in(-1,1) & f'(x)<0 & f(x)\text{decreciente} \\ \text{Si} & x\in(1,-\infty) & f'(x)>0 & f(x)\text{creciente} \end{cases}$$

Septiembre 2016. Problema 3B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-9}$$

a) Calcúlense sus asíntotas.
b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución.

b. La monotonía de una función (crecimiento y decrecimiento), se asocia al signo de la primera derivada.

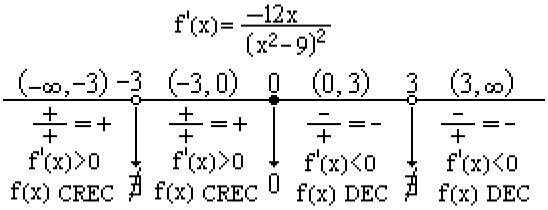
$$\text{Si } f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\text{ es decreciente}$$
$$\text{Si } f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\text{ es creciente}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-9\right)-\left(x^2-3\right)\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{2x^3-18x-2x^3+6x}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{-12x}{\left(x^2-9\right)^2}$$

El signo de la derivada se estudia mediante los ceros y los polos de la derivada.

Ceros: $f'(x)=0 \quad \frac{-12x}{\left(x^2-9\right)^2}=0 \quad -12x=0 \quad x=0$

Polos: $\left(x^2-9\right)^2=0 \quad x^2-9=0 \quad x=\pm 3$



- Creciente: $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$
- Decreciente: $(0,3)\cup(3,\infty)$

Junio 2016. Problema 3B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2.$$

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución.

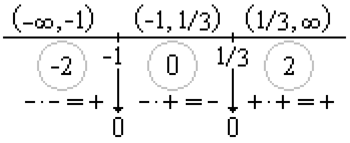
b. La monotonía y los extremos relativos de la función se pueden estudiar simultáneamente mediante los ceros y el signo de la derivada.

Factorizando la expresión de la derivada por Ruffini, se obtiene:

$$f'(x)=(6x-2)\cdot(x+1)$$

Igualando a cero: $(6x-2)\cdot(x+1)=0:\begin{cases}x=-1\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}$

Signo de $f'(x)=(6x-2)\cdot(x+1)$



- Si $x\in(-\infty,-1)\cup\left(1/3,\infty\right)$ $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente
- Si $x\in\left(-1,1/3\right)\cup\left(1/3,\infty\right)$ $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente

Extremos relativos:

- En $x=-1$: $f'(-1)=0$ y $\begin{cases}f'\left(-1^-\right)>0\\ f'\left(-1^+\right)<0\end{cases}\Rightarrow(-1, f(-1))$ La función tiene un máximo

- En x = 1/3: $f'\left(\frac{1}{3}\right)=0$ y $\begin{cases} f'\left(\frac{1}{3}^{-}\right)<0 \\ f'\left(\frac{1}{3}^{+}\right)>0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ La función tiene un máximo

$$f(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+5=7 \text{ Máximo en } (-1, 7)$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right)=2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^3+2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^2-2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)+5=\frac{125}{27} \text{ Mínimo en } \left(\frac{1}{3},\frac{125}{27}\right)$$

Modelo 2016. Problema 3B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real

$$f(x)=x^2\cdot e^{x^2}$$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Determínense sus intervalos de concavidad (∩) y convexidad (∪).

Solución.

a. $f'(x)=2x\cdot e^{x^2}+x^2\cdot e^{x^2}\cdot 2x=\left(2x+2x^3\right)\cdot e^{x^2}$

b. Los intervalos de curvatura de una función se asocian al signo de la segunda derivada.

- Si $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava (∩)
- Si $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es cónvexa (∪)

$$f''(x)=\left(2+6x^2\right)\cdot e^{x^2}+\left(2x+2x^3\right)\cdot e^{x^2}\cdot 2x=e^{x^2}\left(2+10x^2+4x^4\right)$$

- $e^{x^2}>0\ \forall\, x\in R$. Por definición, la exponencial siempre es positiva

- $2+10x^2+4x^4=0 \xrightarrow{x^2=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4}} \begin{cases} x_1^2<0 \\ x_2^2<0 \end{cases} \Rightarrow$ La cuación no tiene soluciones reales .

$f''(x)>0\ \forall\, x\in R$, f(x) es convexa (∪) en todo su dominio (R).

Modelo 2016. Problema 3A.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$$

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución.

b. La monotonía de la función se asocia al signo de la primera derivada, en los intervalos donde la derivada sea positiva, la función es creciente, en los intervalos donde la derivada es negativa la función es decreciente.

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2} \qquad f'(x)=\frac{\left(x^3\right)'\cdot\left(1-x^2\right)-\left(x^3\right)\cdot\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2\cdot\left(1-x^2\right)-\left(x^3\right)\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

Agrupando y ordenando la derivada:

$$f'(x)=\frac{3x^2-3x^4+2x^4}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-x^4}{\left(1-x^2\right)^2}$$

El estudio del signo de la derivada se hace a partir de los ceros y los polos de la derivada.

Ceros (valores de x que anulan la derivada, son los ceros del numerador).

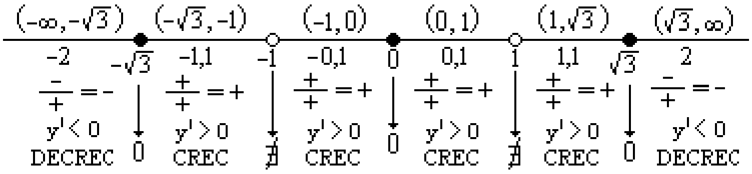
$$3x^2-x^4=0: x^2\cdot\left(3-x^2\right)=0: \begin{cases} x^2=0: x=0 \\ 3-x^2=0: x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Polos (valores de x que hacen infinita la derivada, son los ceros del denominador)

$$\left(1-x^2\right)^2=0:1-x^2=0:x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Los ceros y los polos se representan sobre una recta Real y se estudia el signo de la derivada dando un valor de cada intervalo a la derivada y calculando su signo.

$$f'(x)=\frac{x^2\cdot\left(3-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$



- $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)\ f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ es decreciente
- $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)\ f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ es creciente

Septiembre 2015. Problema 2B.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

a) Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.

Solución.

a. Una función alcanza sus extremos relativos en los puntos donde su primera derivada es nula y su segunda derivada es distinta de cero, con el siguiente criterio:

$$f'(a)=0 \quad f''(a)<0 \quad (a, f(a)) \quad \text{Máximo}$$
$$f'(a)=0 \quad f''(a)>0 \quad (a, f(a)) \quad \text{Mínimo}$$

$$f'(x)=-16x+24 \qquad f'(x)=0 \qquad -16x+24=0 \qquad x=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$$

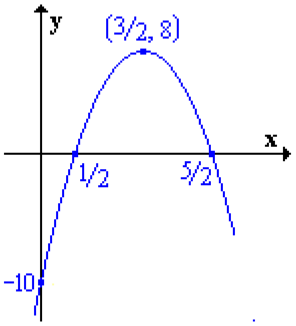
$$f''(x)=-16<0 \ \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) \text{ la función tiene un máximo.}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=-8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+24\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-10=8 \ \text{Máximo en } \left(\frac{3}{2},8\right)$$

Por ser una función cuadrática, su gráfica es una parábola, y además de vértice (en este caso el máximo), se calculan los puntos de corte con los ejes.

$$OX(y=0):-8x^2+24x-10=0:\begin{cases} x=1/2:\left(1/2,0\right)\\ x=5/2:\left(5/2,0\right)\end{cases}$$

$$OY(x=0): y=-8\cdot 0^2+24\cdot 0-10=-10:(0,-10)$$



Septiembre 2015. Problema 3A.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2,\ a \in R$.

a) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en x = 1/2. Compruébese que se trata de un mínimo.

Solución.

a. La condición necesaria para que una función alcance un extremo relativo en un punto, es que en ese punto la derivada sea nula.

$$f'(x)=12x^2-2ax-a \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right)=12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-a=0 \qquad 3-2a=0$$

$$a=\frac{3}{2}$$

La condición necesaria y suficiente para que una función alcance un mínimo en un punto es que en ese punto la primera derivada sea nula y la segunda derivada sea positiva.

$$f''(x)=24x-2a \overset{a=\frac{3}{2}}{=} 24x-3 \qquad f''\left(\frac{1}{2}\right)=24\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-3=9>0$$

En x = ½, la función cumple las condiciones de mínimo.

Modelo 2015. Problema 2B.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2:$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Hállense sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

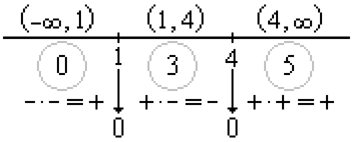
Solución.

a. La monotonía de una función se asocia al signo de su derivada:

$$\begin{cases}\text{Si } f'(x)>0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente}\\ \text{Si } f'(x)<0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente}\end{cases}$$

$$f(x)=2x^3-15x^2+24x+2 \qquad f'(x)=6x^2-30x+24=6\cdot(x-1)\cdot(x-4)$$

Sobre una recta se marcan los valores que anulan la derivada, obteniendo tres intervalos. En cada intervalo se selecciona un valor y se estudia el signo que toma la derivada, obteniendo la figura adjunta.



- Si $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)\Rightarrow f'(x)>0, f(x)$ es creciente
- Si $x\in(1,4)\Rightarrow f'(x)<0, f(x)$ es decreciente

b. Los extremos relativos son los puntos donde la primera derivada se anula y la segunda es distinta de cero, con el siguiente criterio:

- Si $f'(x_o)=0$ y $f''(x_o)<0$, en el punto $(x_o, f(x_o))$ la función presenta un máximo
- Si $f'(x_o)=0$ y $f''(x_o)>0$, en el punto $(x_o, f(x_o))$ la función presenta un mínimo

$$f'(x)=0 \qquad 6\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0:\begin{cases}x=1 & f(1)=2\cdot1^3-15\cdot1^2+24\cdot1+2=13\\ x=4 & f(4)=2\cdot4^3-15\cdot4^2+24\cdot4+2=-14\end{cases}$$

$$f''(x)=12x-30:\begin{cases}f''(1)=12\cdot1-30=-18\Rightarrow \text{En el punto } (1,13) \text{ la función tiene un máximo local}\\ f''(4)=12\cdot4-30=18\Rightarrow \text{En el punto } (4,-14) \text{ la función tiene un mínimo local}\end{cases}$$

Los puntos de inflexión son puntos donde la segunda derivada se anula y la tercera derivada es distinta de cero.

$$f''(x)=0 \qquad 12x-30=0: x=\frac{5}{2} \quad f\left(\frac{5}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3-15\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+24\cdot\left(\frac{5}{2}\right)+2=-\frac{1}{2}$$

$$f'''(x)=12\neq0 \text{ en } \left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right) \text{la función tiene un punto de inflexión}$$

Septiembre 2014. Problema 2A.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{x(x-2)}$$

b) Estúdiese si la función f es creciente o decreciente en un entorno de x = 4.

Solución.

b. La monotonía de la función se relaciona con el signo de la primera derivada.

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x-3)\cdot 1\cdot\left(x^2-2x\right)-(x-3)^2\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x\right)^2}=\frac{2(x-3)\left(x^2-2x-(x-3)(x-1)\right)}{\left(x^2-2x\right)^2}=\frac{2(x-3)(2x-3)}{\left(x^2-2x\right)^2}$$

$$f'(4)=\frac{2(4-3)(2\cdot 4-3)}{\left(4^2-2\cdot 4\right)^2}=\frac{5}{32}>0$$

En x = 4 la función es continua $\left(\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)=\frac{1}{8}\right)$, y su derivada positiva, por lo tanto en un entorno de x = 4 la función es creciente

Problema 3.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}$$

b) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

Solución.

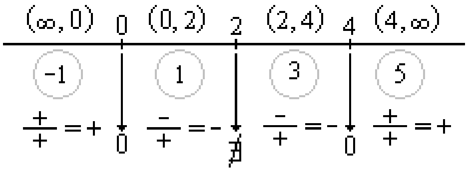
b. **Dominio**: $D[f(x)]=\{x\in R/x-2\neq 0\}=R-\{2\}$

Monotonía: se asocia al signo de la derivada, en los intervalos donde $f'(x)>0$, f(x) es creciente, en los intervalos donde $f'(x)<0$, f(x) es decreciente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$\text{Ceros y polos de la derivada: }\begin{cases}\text{Ceros}: x^2-4x=0 : x\cdot(x-4)=0 : \begin{cases}x=0\\ x=4\end{cases}\\ \text{Polos}: (x-2)^2=0 : x-2=0 : x=2\end{cases}$$

Estudio del signo de $f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

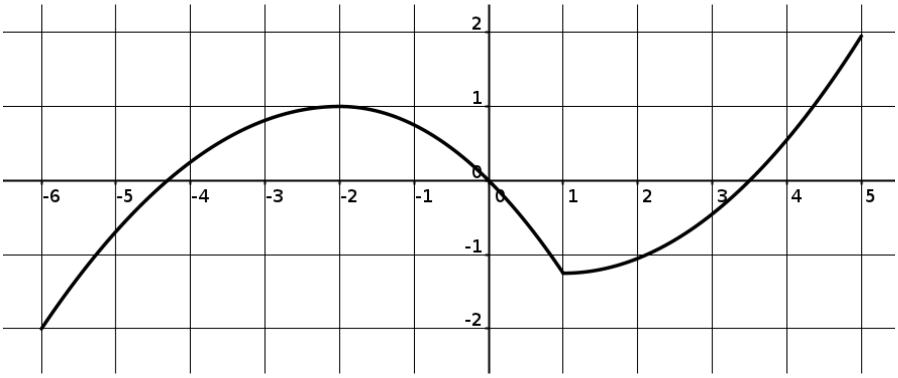


$$\text{Si }\ x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)\text{es creciente}$$

$$\text{Si }\ x\in(0,2)\cup(2,4)\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)\text{es decreciente}$$

Modelo 2014. Problema 2B.- (Calificación máxima: 2 puntos)

La figura representa la gráfica de una función f : [–6; 5] → R. Contéstese razonadamente a las preguntas planteadas.



a) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

b) ¿En qué puntos del intervalo [–6,5] f alcanza sus extremos relativos?

Solución.

a. Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto, (pendiente de la recta tangente a la función en el punto), la pendiente de la recta tangente es positiva en los intervalos (–6, –2) y (1, 5), por tanto en dichos intervalos la derivada de la función es positiva.

b. Una función alcanza extremos relativos en los puntos interiores al intervalo donde el valor de la función es mayor (máximo) o menor (mínimo) que cualquier valor de la función en un entorno cercano del punto. La función que se describe gráficamente, presenta extremos relativos en: un máximo en (–2, 1), un mínimo en x = 1.

Septiembre 2013. Ejercicio 3B: (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$.

a) Determínense los extremos relativos de f.

Solución.

a. Los extremos relativos de una función son los puntos donde la primera derivada se anula y la segunda es distinta de cero, con el criterio de que si la segunda derivada es positiva, es un mínimo, y si es negativa es un máximo.

$$\text{En } (x_o, f(x_o)) \text{ existe un extremo relativo si } f'(x_o)=0 \text{ y } f''(x_o)\neq 0: \begin{cases} f''(x_o)>0, & \text{Mínimo} \\ f''(x_o)<0, & \text{Máximo} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(x)'\cdot(x^2+4)-x\cdot(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{1\cdot(x^2+4)-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=0: \quad \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=0: \quad 4-x^2=0: \quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot(x^2+4)^2-(4-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \frac{(x^2+4)\cdot\left[-2x\cdot(x^2+4)-(4-x^2)\cdot 2\cdot 2x\right]}{(x^2+4)^4} =$$

$$= \frac{-2x\cdot(x^2+4)-(4-x^2)\cdot 4x}{(x^2+4)^3} = \frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{(x^2+4)^3} = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(-2) = \frac{2\cdot(-2)^3-24\cdot(-2)}{((-2)^2+4)^3} = \frac{32}{512} > 0 \Rightarrow \text{En } (-2, f(-2)) \text{ la función tiene un mínimo}$$

$$f''(2) = \frac{2\cdot(2)^3-24\cdot(2)}{((2)^2+4)^3} = \frac{-32}{512} > 0 \Rightarrow \text{En } (2, f(2)) \text{ la función tiene un máximo}$$

$$f(-2)=\frac{-2}{(-2)^2+4}=\frac{-1}{4}\Rightarrow\left(-2,\frac{-1}{4}\right)\text{ Mínimo}$$

$$f(2)=\frac{2}{2^2+4}=\frac{1}{4}\Rightarrow\left(2,\frac{1}{4}\right)\text{ Máximo}$$

Junio 2013. Problema 3B.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=x(5-x)^2$.

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Determínense los intervalos de concavidad y convexidad de f.

Solución.

a. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función se asocian al signo de su derivada, en los intervalos en los que $f'(x)>0$, la función es creciente, en los que $f'(x)<0$, la función es decreciente.

$$f(x)=x(5-x)^2=x\left(25-10x+x^2\right)=x^3-10x^2+25x$$

$$f'(x)=3x^2-20x+25 \qquad 3x^2-20x+25=0:\begin{cases}x={}^5\!/_3\\ x=5\end{cases} \qquad f'(x)=(3x-5)\cdot(x-5)$$

- Si $x<5/3\Rightarrow f'(x)>0$, f(x) es CRECIENTE
- Si $5/3<x<5\Rightarrow f'(x)<0$, f(x) es DECRECIENTE
- Si $x>5\Rightarrow f'(x)>0$, f(x) es CRECIENTE

b. Los intervalos de curvatura de asocian al signo de la segunda derivada.

Si $f''(x)>0\Rightarrow$ f(x) es cóncava

Si $f''(x)<0\Rightarrow$ f(x) es convexa

$$f''(x)=6x-20 \qquad f''(x)=0 \qquad x=\frac{10}{3}$$

- Si $x<{}^{10}\!/_3\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow$ f(x) es convexa
- Si $x>{}^{10}\!/_3\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow$ f(x) es cóncava

Modelo 2013. Problema 2A.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función real de variable real $f(x)=\frac{3x^2-5}{x+1}$

b) Hállense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución.

b. Cortes con OX(y = 0): $\frac{3x^2-5}{x+1}=0$; $3x^2-5=0$; $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\pm\sqrt{15}}{3}$

Los puntos de corte con el eje OX son: $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},0\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{15}}{3},0\right)$

Cortes con OY(x = 0): $y=\frac{3\cdot 0^2-5}{0+1}=-5$ El punto de corte es (0, –5).

La monotonía de la función se asocia al signo de la primera derivada:

$$\begin{cases}f'(x)<0\Rightarrow f(x)\text{Decreciente}\\ f'(x)>0\Rightarrow f(x)\text{Creciente}\end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{6x\cdot(x+1)-\left(3x^2-5\right)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{6x^2+6x-3x^5+5}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+6x+5}{(x+1)^2}$$

Para estudiar el signo de la derivada, se calculan los ceros y los polos de la expresión.

$$f'(x)=\frac{3x^2+6x+5}{(x+1)^2}:\begin{cases}\text{Ceros}: 3x^2+6x+5=0 : x=\dfrac{-6\pm\sqrt{-24}}{6}\notin R\ (\text{No tiene ceros})\\ \text{Polos}: (x+1)^2=0 : x=-1 : (x+1)^2\ge 0\ \forall\, x\in R\end{cases}$$

$$f'(x)>0\ \forall\, x\in D[f(x)]$$

La función f(x) es creciente en todo su dominio $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

Septiembre 2011. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la fundón real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

a) Calcúlense los extremos relativos de f.

Solución.

a. Máximos y mínimos. Puntos de la función donde la primera derivada es cero y la segunda es distinta de cero, con el criterio de que si la segunda derivada es positiva, es un mínimo, si es negativa es un máximo.

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x+1)\cdot 1\cdot\left(x^2+1\right)-(x+1)^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+1-(x+1)\cdot x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot(x+1)\cdot(1-x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(x)=2\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2}=2\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)\left(\left(x^2+1\right)+\left(1-x^2\right)\cdot 2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=2\frac{-2x\cdot\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{4x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f'(x)=0\ :\ \frac{2\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=0\ :\ :\ x=\pm 1 : \begin{cases}\text{Si}\quad x=-1\quad y=\dfrac{(-1+1)^2}{(-1)^2+1}=0\quad (-1,0)\\ \text{Si}\quad x=1\quad y=\dfrac{(1+1)^2}{1^2+1}=2\quad (1,2)\end{cases}$$

- $f''(-1)=\dfrac{4\cdot(-1)\left((-1)^2-3\right)}{\left((-1)^2+1\right)^3}=1>0$ $1-x^2=0\Rightarrow$ En (−1, 0) la función tiene un mínimo
- $f''(1)=\dfrac{4\cdot 1\left(1^2-3\right)}{\left(1^2+1\right)^3}=-1<0$ $\Rightarrow$ En (1, 2) la función tiene un máximo.

Septiembre 2010. F.M. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=x^3-3x^2+4$$

b) Determínese los extremos relativos de *f*.

Solución.

b. Una función tiene extremos relativos en los puntos donde su primera derivada sea cero y su segunda derivada sea distinta de cero, con el siguiente criterio:

$$\text{Sí } f'(a)=0 \text{ y } f''(a)\ne 0 \text{ en (a, f(a)) la función tiene un extremo relativo: }\begin{cases}f''(a)<0:\text{Máximo}\\ f''(a)>0:\text{Mínimo}\end{cases}$$

$$f'(x)=0\ :\ 3x^2-6x=0\ :\ 3x\cdot(x-2)=0\ :\ \begin{cases}x=0\\ x-2=0 : x=2\end{cases}$$

$$f''(0)=6\cdot 0-6=-6<0 \text{ En (0, f(0)) la función tiene un máximo local}$$

$$f''(2)=6\cdot 2-6=6>0 \text{ En (2, f(2)) la función tiene un mínimo local}$$

$$f(0)=0^3-3\cdot 0^2+4=4\ \Rightarrow (0,\,4) \text{ Máximo}$$

$$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+4=0 \Rightarrow \text{(2, 0) Mínimo.}$$

Junio 2010. F.M. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales.

Solución.

b. Una función tiene extremos relativos en los puntos donde su primera derivada sea cero y su segunda derivada sea distinta de cero, con el siguiente criterio:

Sí $f'(a)=0$ y $f''(a)\neq 0$ en (a, f(a)) la función tiene un extremo relativo: $\begin{cases} f''(a)<0: \text{Máximo} \\ f''(a)>0: \text{Mínimo} \end{cases}$

$$f'(x)=\frac{x^2}{x-1}=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\ :\ \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\ :\ x^2-2x=0\ :\ x\cdot(x-2)=0:\begin{cases} x=0 \\ x-2=0: x=2 \end{cases}$$

$$f(0)=\frac{0^2}{0-1}=0:(0,0)\ ;\ f(2)=\frac{2^2}{2-1}=4:(2,4)$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-2\cdot\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=-2<0 \Rightarrow \text{(0, 0) la función tiene un máximo.}$$

$$f''(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=2>0 \Rightarrow \text{(2, 4) la función tiene un mínimo.}$$

Modelo 2010. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=ax^3+bx^2+c \quad ; \quad a,b,c\in R$$

a) ¿Qué valores deben tomar a, b y c para que la gráfica de pase por el punto O(0, 0) y además tenga un máximo relativo en el punto P(1, 2)?

Solución.

a. Los parámetros a, b y c se obtienen planteando un sistema con las ecuaciones que permiten plantear los datos. Para plantear los datos hace falta la función f(x) = $ax^3 + bx^2 + c$ y su derivada f ’(x) = $3ax^2 + 2bx$

- Pasa por el punto (0, 0) ⇒ (0, 0) ∈ y = f(x): f(0) = 0. $a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c = 0$
- Máximo en (1, 2): $\begin{cases} (1,2)\in y=f(x): f(1)=2: \quad a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c=2 \\ \text{Máximo} \Rightarrow f'(1)=0: \quad 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=2 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \quad \text{Resolviendo}: \begin{cases} a=-4 \\ b=6 \\ c=0 \end{cases}$$

$$f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

Junio 2009. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)^2$$

a) Determínese los extremos relativos de f.

Solución.

a. En los puntos de extremo relativo (máximos o mínimos locales) la primera derivada es nula y la segunda derivada es distinta de cero, con el siguiente criterio:

$$\text{En } x = a.\ f'(a) = 0 : f''(a) \neq 0 : \begin{cases} f''(a) < 0 \Rightarrow (a, f(a)) \text{existe un máximo} \\ f''(a) > 0 \Rightarrow (a, f(a)) \text{existe un mínimo} \end{cases}$$

Se calculan la primera y segunda derivada.

$$f'(x) = 2\left(x^2 - 1\right) \cdot 2x = 4\left(x^3 - x\right)$$

$$f''(x) = 4\left(3x^2 - 1\right)$$

Se iguala a cero la primera derivada y se calculan los posibles extremos relativos.

$$f'(x) = 0 : 2\left(x^2 - 1\right) \cdot 2x = 0 : \begin{cases} 2x = 0 : x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 : x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Se sustituyen las raíces de la primera derivada en la segunda y se sigue el criterio propuesto.

$$f''(-1) = 4\left(3 \cdot (-1)^2 - 1\right) = 8 > 0 \Rightarrow (-1, f(-1)) \text{ mínimo}$$

$$f''(0) = 4\left(3 \cdot (0)^2 - 1\right) = -4 > 0 \Rightarrow (0, f(0)) \text{ máximo}$$

$$f''(1) = 4\left(3 \cdot 1^2 - 1\right) = 8 > 0 \Rightarrow (1, f(1)) \text{ mínimo}$$

Se calculan las imágenes de −1, 0 y 1.

$$f(-1) = f(1) = \left(1^2 - 1\right)^2 = 0 \quad f(0) = \left(0^2 - 1\right)^2 = 1$$

En (−1, 0) y en (1, 0) la función presenta mínimos relativos a su vez son absolutos, en (0, 1) la función tiene un máximo relativo.

Modelo 2009. Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad ; \quad a, b \in \Re.$$

a) ¿Qué valores deben tomar a y b para que f tenga un máximo relativo en el punto P(1, 4)?

b) Para a = −2, b = −8, determínense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y determínense los puntos de inflexión de dicha gráfica.

Solución.

a. Si la función tiene un máximo en (1, 4), se deben cumplir dos condiciones:

i. El punto P pertenece a la función $\left(P(1, 4) \in y = f(x)\right)$. f(1) = 4

$$1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = 0 : a + b = -1$$

ii. En el punto P existe un máximo relativo. f ´(1) = 0

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 : 2a + b = -3$$

Las dos condiciones permiten plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = -3 \end{cases} : \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

b. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$. Puntos de corte con los ejes:

- OX(y = 0): $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$: $x\cdot(x^2 - 2x - 8) = 0$: $\begin{cases} x = 0 : (0,0) \\ x^2 - 2x - 8 = 0 : \begin{cases} x = -2 : (-2,0) \\ x = 4 : (4,0) \end{cases} \end{cases}$
- OY(x = 0): y = 0: (0, 0).

Puntos de inflexión. Para que una función tenga un punto de inflexión en un punto x_o debe cumplir: $f''(x_o) = 0$ y $f'''(x_o) \neq 0$.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x : \ f'(x) = 3x^2 - 4x - 8 : \ f''(x) = 6x - 4 : \ f'''(x) = 6$$

$$f''(x) = 6x - 4 = 0 : x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} : \ f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{160}{27} : \ f'''(x) = 6 \neq 0$$

En el punto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{160}{27}\right)$ La función tiene un punto de inflexión.

Septiembre 2008. Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$$

b. Calcúlense los máximos y mínimos relativos de f y determínense sus intervalos de crecimiento.

Solución.

b. Estudio de la primera derivada. En los puntos donde se haga cero la derivada y además cambie de signo existirá un extremo relativo, con el siguiente criterio:

- Si $f'(x_o) = 0 : \left\{ \begin{matrix} f'(x_o^-) > 0 \\ f'(x_o^-) < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x_o, f(x_o))$ Máximo
- Si $f'(x_o) = 0 : \left\{ \begin{matrix} f'(x_o^-) < 0 \\ f'(x_o^-) > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x_o, f(x_o))$ Mínimo

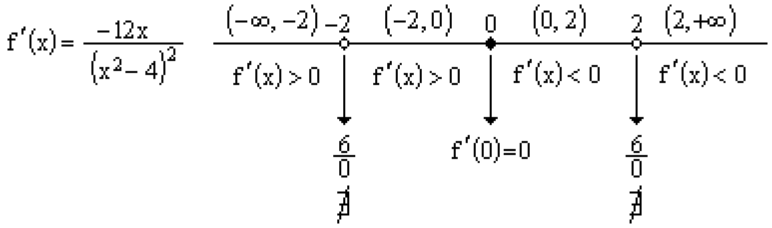
Monotonía:

- En los intervalos donde $f'(x) > 0$, la función será creciente.
- En los intervalos donde $f'(x) < 0$, la función será decreciente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2 - 4) - (x^2 + 2)\cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 4x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-12x}{(x^2 - 4)^2}$$

Ceros y signos de la derivada.

- Ceros: $-12x = 0$: x = 0
- Polos: $(x^2 - 4)^2 = 0$: $x = \pm 2$



- $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente
- $(0, 2) \cup (2, +\infty)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

En x = 0, se anula la derivada, pasando de positiva (creciente) a negativa (decreciente). En (0, f(0)) la función tiene un máximo relativo.

$$f(0)=\frac{0^2+2}{0^2-4}=-\frac{1}{2}$$

Máximo en $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

Junio 2008. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x}$$

b. Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

Solución.

a. Monotonía: Se estudia en el signo de la derivada. En los intervalos en los que la derivada sea positiva, la función será creciente, en los que sea negativa decreciente.

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+x+2\right)'\cdot x-\left(x^2+x+2\right)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{(2x+1)\cdot x-\left(x^2+x+2\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}$$

Ceros y polos de la derivada: $\begin{cases}\text{Ceros}: x^2-2=0: x=\pm\sqrt{2}\\ \text{Polos}: x^2=0: x=0\end{cases}$

$(-\infty,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},0)$	0	$(0,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},+\infty)$
$f'(x)>0$ f(x) Creciente	$f'=0$	$f'(x)<0$ f(x) Decreciente	$\nexists f'$	$f'(x)<0$ f(x) Decreciente	$f'=0$	$f'(x)>0$ f(x) Creciente

Extremos relativos. La función tendrá extremos relativos en los puntos donde la primera derivada sea cero y la segunda distinta de cero, con el criterio de que si la segunda derivada es positiva será un mínimo, y si es negativa un máximo.

$$f'(x)=0: x=\pm\sqrt{2}$$

$$f''(x)=\frac{\left(x^2-2\right)'\cdot x^2-\left(x^2-2\right)\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2x\cdot x^2-\left(x^2-2\right)\cdot 2x}{x^4}=\frac{4x}{x^4}=\frac{4}{x^3}$$

$$f''\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{4}{\left(-\sqrt{2}\right)^3}=-\sqrt{2}<0:\text{Máximo}$$

$$f''\left(\sqrt{2}\right)=\frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=\sqrt{2}>0:\text{Mínimo}$$

$$f\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)+2}{-\sqrt{2}}=1-2\sqrt{2}\quad:\quad f\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)+2}{\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}$$

Máximo relativo: $\left(-\sqrt{2},\ 1-2\sqrt{2}\right)$

Mínimo relativo: $\left(\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{2}\right)$

Modelo 2008. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, se pide determinar:

b. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Solución.

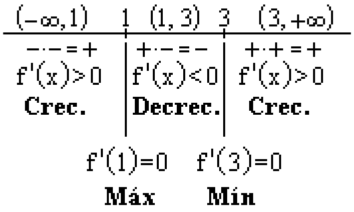
b. La monotonía de la función se asocia al signo de la primera derivada con el siguiente criterio:

- En los intervalos en los que f '(x) sea mayor que cero, la función será creciente.
- En los intervalos en los que f '(x) sea menor que cero, la función será decreciente.

El signo de la derivada se estudia por intervalos a partir de las raíces de la misma.

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$f'(x)=0: 3x^2-12x+9=0: \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} : f'(x)=3\cdot(x-1)\cdot(x-3)$$



$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$-\cdot-=+$		$+\cdot-=-$		$+\cdot+=+$
$f'(x)>0$		$f'(x)<0$		$f'(x)>0$
Crec.		**Decrec.**		**Crec.**
	$f'(1)=0$		$f'(3)=0$	
	Máx		**Mín**	

La función es creciente $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

La función es decreciente $(1,3)$

Septiembre 2007. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por el punto (0, 0).
- Tiene un máximo local en el punto (1, 2).

Se pide:

(a) Obtener el valor de los coeficientes *a, b* y c.

Solución.

a. Los parámetros a, b y c se obtienen planteando un sistema con las ecuaciones que permiten plantear los datos. Para plantear los datos hace falta la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ y su derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

- Pasa por el punto (0, 0) ⇒ (0, 0) ∈ y = f(x): f(0) = 0. $a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c = 0$
- Máximo en (1, 2): $\begin{cases} (1,2)\in y=f(x): f(1)=2: \quad a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c=2 \\ \text{Máximo} \Rightarrow f'(2)=0: \quad 2a\cdot 1^2+2b\cdot 1=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=2 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \qquad \text{Resolviendo}: \begin{cases} a=-4 \\ b=6 \\ c=0 \end{cases}$$

$$f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

Junio 2007. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{x+3}$$

b. Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

Solución.

b) El estudio de la monotonía y los extremos relativos se puede hacer simultáneamente estudiando el signo y los ceros de la primera derivada.

Monotonía.

- En los intervalos en los que la 1ª derivada sea positiva, la función será creciente.
- En los intervalos en los que la 1ª derivada sea negativa, la función será decreciente.

Extremos relativos (Máximos y mínimos locales).

- Si $f'(x_o)=0: \begin{Bmatrix} f'(x_o^-)>0 \\ f'(x_o^+)<0 \end{Bmatrix}: (x_o, f(x_o))$ Existe un máximo
- Si $f'(x_o)=0: \begin{Bmatrix} f'(x_o^-)<0 \\ f'(x_o^+)>0 \end{Bmatrix}: (x_o, f(x_o))$ Existe un mínimo

Derivada:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)\cdot(x+3)-(x-3)^2\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{(x-3)\cdot[2(x+3)-(x-3)]}{(x+3)^2}=\frac{(x-3)(x+9)}{(x+3)^2}$$

Ceros y polos de la 1ª derivada:

$$\begin{cases}\text{Ceros}:(x-3)(x+9)=0:\begin{cases}x=3\\x=-9\end{cases}\\ \text{Polos}:(x+3)^2=0:x=-3\end{cases}$$

$(-\infty,-9)$	9	$(-9,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$
$f(x)$		$f(x)$		$f(x)$		$f(x)$
Creciente		Decreciente		Creciente		Decreciente
	$f'=0$		No $\exists$		$f'=0$	

- En $x=-9$, se cumplen las condiciones de máximo local: $f'\left(-9^-\right)>0:f'(-9)=0:f'\left(-9^+\right)<0$

$$f(-9)=\frac{(-9-3)^2}{-9+3}=-24\Rightarrow(-9,-24)\ \text{Máximo local}$$

- En $x=3$, se cumplen las condiciones de mínimo local: $f'\left(3^-\right)<0:f'(3)=0:f'\left(3^+\right)>0$

$$f(3)=\frac{(3-3)^2}{3+3}=0\Rightarrow(3,0)\ \text{Mínimo local}$$

- Creciente sí $x\in(-\infty,-9)\cup(3,+\infty)$
- Decreciente sí $x\in(-9,-3)\cup(-3,3)$

Junio 2006. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=x^3-9x$$

Se pide:

a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.

Solución.

Para que una función alcance un extremo relativo en un punto (x_o) debe cumplir las siguientes condiciones:

1. $f'(x_o)=0$
2. $f''(x_o)\neq 0$

Criterio para discernir los extremos relativos.

- Sí $f''(x_o)>0$, en (x_o, $f(x_o)$) existe un **mínimo** relativo.
- Sí $f''(x_o)>0$, en (x_o, $f(x_o)$) existe un **máximo** relativo.

$$f(x)=x^3-9x \qquad f'(x)=3x^2-9 \qquad f''(x)=6x$$

$$f'(x)=0:\ 3x^2-9=0:\begin{cases}x=-\sqrt{3}:\ f''\left(-\sqrt{3}\right)=-6\sqrt{3}\Rightarrow\left(-\sqrt{3},f\left(-\sqrt{3}\right)\right)\ \text{Máximo}\\x=+\sqrt{3}:\ f''\left(+\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}\Rightarrow\left(\sqrt{3},f\left(\sqrt{3}\right)\right)\ \text{Mínimo}\end{cases}$$

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\left(-\sqrt{3}\right)^3-9\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^3-9\cdot\left(\sqrt{3}\right)=-6\sqrt{3}$$

$$\left(-\sqrt{3},6\sqrt{3}\right)\text{Máximo} \qquad \left(\sqrt{3},-6\sqrt{3}\right)\text{Mínimo}$$

Septiembre 2005. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$$

b. Calcular sus máximos y sus mínimos relativos, si existen.

Solución.

Para que f (x) tenga un extremo relativo en x = x_o se debe cumplir dos condiciones.

i. que la primera derivada se anule en x_o. $f'(x_o)=0$

ii. que la segunda derivada en x_o sea distinta de cero. $f''(x_o)\neq 0$

Para diferenciar el tipo de extremo se usa el criterio: $\begin{cases} f''(x_o)<0\Rightarrow (x_o,f(x_o)) \text{ Máximo} \\ f''(x_o)>0\Rightarrow (x_o,f(x_o)) \text{ Mínimo}\end{cases}$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2-9\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{-18x}{\left(x^2-9\right)^2}\Rightarrow x=0$$

$$f''(x)=\frac{-18\cdot\left(x^2-9\right)^2-(-18x)\cdot 2\left(x^2-9\right)\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^4}=\frac{54x^2+162}{\left(x^2-9\right)^3}:f''(0)=\frac{54\cdot 0^2+162}{\left(0^2-9\right)^3}=-\frac{162}{729}<0$$

$$f(0)=\frac{0^2}{0^2-9}=0$$

En el punto (0, 0) la función tiene un máximo

Modelo 2005. 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función f(x) = x^3 – 3x

a) Calcular sus extremos relativos y su punto de inflexión.

Solución.

La condición necesaria y suficiente para que una función alcance un extremo relativo en un punto xo es que:

$$f'(x_o)=0 \quad y \quad f''(x_o)\neq 0$$

Con el siguiente criterio: $\begin{cases} \text{Si } f'(x_o)=0 \text{ y } f''(x_o)<0\Rightarrow (x_o,f(x_o))\exists \text{ un MÁXIMO} \\ \text{Si } f'(x_o)=0 \text{ y } f''(x_o)>0\Rightarrow (x_o,f(x_o))\exists \text{ un MÍNIMO}\end{cases}$

Derivadas de f (x):

$$f(x)=x^3-3x\,;\ f'(x)=3x^2-3\ :\ f''(x)=6x$$

igualando a cero la deriva se obtienen los posible puntos de extremo relativo.

$$f'(x)=0\ ;\ 3x^2-3=0\ :\ x=\pm 1:\begin{cases} \text{Si } x=1\ :\ y=f(1)=-2 \\ \text{Si } x=-1\ :\ y=f(-1)=2\end{cases}$$

para comprobar si es un extremo relativo se usa el criterio de la derivada segunda

$$f''(-1)=-6<0\Rightarrow(-1,2)\ \exists \text{un MÁXIMO}$$

$$f''(1)=6>0\Rightarrow(1,-2)\exists \text{un MÍNIMO}$$

La condición necesaria y suficiente para que una función tenga un punto de inflexión en xo es que:

$$f''(x_0)=0 \text{ y } f'''(x_0)\neq 0$$

Aplicando a la función propuesta, los posibles puntos de inflexión se calculan igualando a cero la segunda derivada y resolviendo la ecuación

$$f''(x_0)=0;\ 6x=0\,;\ x=0\,;\ f(0)=0$$

para comprobar si es un punto de inflexión se utiliza el criterio de la tercera derivada.

$f'''(0)=6\neq 0$

La función presenta un punto de inflexión en (0, 0)

Septiembre 2004. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima 3 puntos)

Se considera la función real definida por

$$f(x)=\frac{x^3}{a}-ax^2+5x+10\ ,\ a\neq 0$$

a) Obtener los valores de a para los cuales la función f (x) tiene un máximo en x = 1.
b) Calcular los extremos relativos de f (x) para a = 3.

Solución.

Para que la función tenga un máximo en x = 1 se debe cumplir: $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f''(1)<0 \end{cases}$

Derivadas de f (x):

$$f'(x)=\frac{3x^2}{a}-2ax+5\ \ :\ \ f''(x)=\frac{6x}{a}-2a$$

$$f'(1)=\frac{3\cdot 1^2}{a}-2a\cdot 1+5=\frac{3}{a}-2a+5=0\quad \text{ordenando}\quad -2a^2+5a+3=0:\begin{cases} a=-\tfrac{1}{2} \\ a=3 \end{cases}$$

$$\text{Si}:\begin{cases} a=-\tfrac{1}{2}\ :\ f''(x)=-12x+1\ :\ f''(1)=-12\cdot 1+1=-11\ :\ \text{En}\ \ x=1\ \ \text{hay un máximo} \\ a=3\ \ :\ f''(x)=2x-6\ \ :\ f''(1)=2\cdot 1-6=-4\ :\ \text{En}\ \ x=1\ \ \text{hay un máximo} \end{cases}$$

Para que la función f (x) tenga un máximo en x = 1, el parámetro a puede tomar los valores $-\tfrac{1}{2}$ ó 3

b. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+5x+10$

Extremos relativos. Una función presenta extremos relativos en los puntos donde su primera derivada es nula y su segunda derivada no nula, con el siguiente criterio:

- Si la segunda derivada es negativa, MÁXIMO
- Si la segunda derivada es positiva, MÍNIMO

$$f'(x)=x^2-6x+5\ \ :\ \ f''(x)=2x-6$$

$$f'(x)=0\ \ :\ \ x^2-6x+5=0:\begin{cases} x=1\quad f''(1)=2\cdot 1-6=-4<0 \\ x=5\quad f''(5)=2\cdot 5-6=4>0 \end{cases}$$

$$f(1)=\frac{1^3}{3}-3\cdot 1^2+5\cdot 1+10=\frac{37}{3}\quad :\quad \text{En}\ \left(1,\frac{37}{3}\right)\ f\ (x)\ \text{tiene un máximo}$$

$$f(5)=\frac{5^3}{3}-3\cdot 5^2+5\cdot 5+10=\frac{5}{3}\quad :\quad \text{En}\ \left(5,\frac{5}{3}\right)\ f\ (x)\ \text{tiene un mínimo}$$

Gráfica. Por ser polinómica el dominio es todo R, no tiene asíntotas, las tendencias en el infinito son:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+10\right)=+\infty\qquad\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+10\right)=-\infty$$

Por ser continua y tener un máximo en x = 1 y un mínimo en x = 5, la monotonía de la función es:

$$\text{En}\ (-\infty,1)\cup(5,+\infty)\ f'(x)>0\Rightarrow f(x)\ \text{es creciente}$$
$$\text{En}\ (1,5)\ f'(x)<0\Rightarrow f(x)\ \text{es decreciente}$$

Los puntos de inflexión y la curvatura se obtiene del estudio de los ceros y signo de la segunda deriva.

$$f''(x)=2x-6:2x-6=0:x=3:\begin{cases} \text{Sí}\ \ x<3\ :\ f''(x)<0,\ \ f(x)\ \text{es concava}(\cap) \\ \text{Si}\ \ x=3\ :\ \ f''(3)=0:f(3)=7\ :\ (3,7)\ \text{Punto de inflexión} \\ \text{Sí}\ \ x>3\ :\ f''(x)>0,\ \ f(x)\ \text{es convexa}(\cup) \end{cases}$$

Todos los datos anteriores permiten trazar la gráfica de la función razonadamente.

Modelo 2004. 2.A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

a) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.

Solución.

a. La condición necesaria y suficiente para que una función y =f (x) alcance en x = x_0 un extremo relativo (máximo o mínimo) es que la primera derivada sea distinta de cero, con el siguiente criterio.

$$\text{Si } f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } f''(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ existe un máximo relativo} \\ \text{Si } f''(x_0) > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ existe un mínimo relativo} \end{cases}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

$$f'(x) = 1 + (-1) \cdot x^{-2} = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 - (-2) \cdot x^{-3} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Igualando a cero la primera derivada, se localizan los posibles extremos relativos, la segunda derivada, confirma y diferencia los extremos relativos.

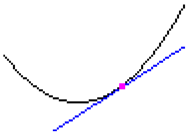
$$f'(x) = 0: \quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0: \quad 1 = \frac{1}{x^2}: \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1: \begin{cases} f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2 \Rightarrow (1, 2) \\ f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2 \Rightarrow (-1, -2) \end{cases}$$

$$f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow (1,2) \text{ Mínimo}$$

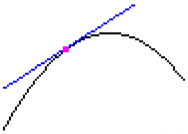
$$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow (-1,-2) \text{ Máximo}$$

b. La curvatura de una función se estudia con el signo de la 2ª derivada según el siguiente criterio.

Si $f''(x) > 0$, la curva estará por encima de la tangente. CONCAVA



Si $f''(x) < 0$, la curva esta por debajo de su tangente. CONVEXA



$$f''(x) = \frac{2}{x^3}: \begin{cases} \text{Si } x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{convexa} \\ \text{Si } x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{concava} \end{cases}$$

Modelo 2004. 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Para cada valor de a se considera la función

$$f(x) = 2x + ax^2 - 4\ln(x)$$

- **a)** Calcular el valor del parámetro real a sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 1. calificar el extremo.
- **b)** Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento para a = 3.

Observación: La notación ln representa el logaritmo neperiano.

Solución.

a. Si una función presenta un extremo relativo en $x = x_0$, entonces la derivada de la función en ese punto es nula.

$$f'(x) = 2 + 2ax - \frac{4}{x}$$

$$f'(1) = 0 \ ; \quad 2 + 2a \cdot 1 - \frac{4}{1} = 0$$

despejando a = 1

$$f(x) = 2x + x^2 - 4\text{Ln}(x)$$

b. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función se estudia en el signo de la primera derivada, con el siguiente criterio.

$$\text{Si} \ \ f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{es creciente}$$
$$\text{Si} \ \ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{es decreciente}$$

$$f(x) = 2x + 3x^2 - 4\text{lux}$$

Derivando:

$$f'(x) = 2 + 6x - \frac{4}{x} = \frac{6x^2 + 2x - 4}{x} = \frac{2\cdot(3x^2 + x - 2)}{x}$$

$- \text{Ceros de } f'(x) = 0 \ ; \ 3x^2 + x - 2 = 0 : \begin{cases} x = -1 \\ x = 2/3 \end{cases}$

$- \text{Polos de } f'(x) \ ; \ x = 0$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $(0, +\infty)$ debido a la expresión Ln(x), el único punto donde puede cambiar de signo es $x = 2/3$:

$$\text{Si} \ \ x \in (0, 2/3) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \quad \text{decreciente}$$
$$\text{Si} \ \ x \in (2/3, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \quad \text{creciente}$$

Junio 2003. 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos).

Sean las funciones f (x) = $x^2 - 9$, g (x) = $x^2 - x - 6$

Calcular:

- **b.** Los extremos relativos de g (x), si existen.

Solución.

b. La condición necesaria y suficiente para que una función alcance un extremo relativo en un punto es que en ese punto la primera derivada sea cero y su segunda derivada sea distinta de cero.

$$g(x) = x^2 - x - 6 \ ; \ g\,´(x) = 2x - 1 \ ; \ g\,´´(x) = 2$$

$g\,´(x) = 2x - 1 : x = \frac{1}{2} : \left\{ \begin{array}{c} g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4} \\ g´´\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \end{array} \right\}$. En $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ la función presenta un mínimo.

Junio 2003. 2B. (puntuación máxima: 3 puntos).

Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

(a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución.

a. Una función es creciente en los intervalos en los que su primera derivada sea positiva

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1-x^2)-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x)>0\ \forall\ x\in \text{Dominio de } f(x)$$

f (x) es estrictamente creciente en su dominio de definición

Septiembre 2002. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima 3 puntos)

Para cada valor de a, se considera la función $f(x)=\dfrac{3x^2-ax}{x+2}$. Se pide:

(a) Calcular el valor de a para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = 2.

Solución:

a) Si una función presenta un mínimo relativo en un punto, en ese punto la derivada debe ser nula.

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2-ax}{x+2}\right)'=\frac{(3x^2-ax)'\cdot(x+2)-(3x^2-ax)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(6x-a)\cdot(x+2)-(3x^2-ax)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{3x^2+12x-2a}{(x+2)^2}$$

Particularizando la derivada en el punto de mínimo e igualando a cero, se obtiene el valor de a

$$f'(2)=\frac{3\cdot 2^2+12\cdot 2-2a}{(2+2)^2}=0:36-2a=0:a=18$$

Junio 2002. 2A.

a) Hallar la coordenadas del mínimo de la curva $y = x^2 - 4x - 5$.

b) Calcular el área del triángulo limitado por el eje OX y las tangentes a la curva dada en los puntos de intersección de dicha curva con el eje OX

Solución.

a) La condición necesaria no suficiente para que una función alcance un extremo relativo en un punto, es que en dicho punto su derivada se anule. Para confirmar la existencia de un extremo relativo en el punto donde se anula la primera derivada, existen dos criterios diferentes:

i. Criterio de la segunda derivada

ii. Criterio del signo de la segunda derivada

$$y = x^2 - 4x - 5$$

$$y' = 2x - 4 = 0$$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2\ ;\ \ y = 2^2 - 4\cdot 2 - 5 = -9$$

$$y'' = 2 > 0 \Rightarrow (2\ ,\ -9) \text{ existe un mínimo}$$

Junio 2002. 2B. (puntuación máxima: 3 puntos).
Se considera la curva de ecuación:

$$y \Rightarrow x^3 - 4x$$

- **a)** Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus máximos y mínimos relativos, si existen
- **b)** Representar gráficamente la curva

Solución.

a. Puntos de corte:

$$\begin{cases} OX: y = 0 : x^3 - 4x = 0 : x \cdot \left(x^2 - 4\right) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 : x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow (0,0), (-2,0), (2,0) \\ OY : x = 0 : y = 0^3 - 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0,0) \end{cases}$$

Máximos y mínimos. La función alcanza extremos relativos(máximos ó mínimos locales) en aquellos puntos donde se anule su primera derivada y sea distinta de cero su segunda derivada.

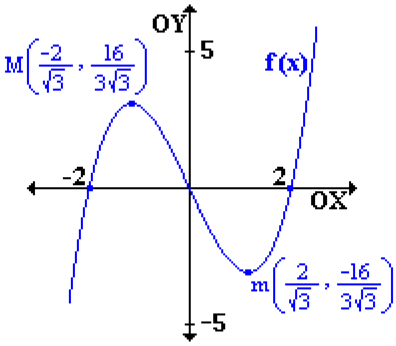
$$f(x) = x^3 - 4x \qquad f'(x) = 3x^2 - 4 \qquad f''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 : \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} : \begin{cases} y = f\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4 \cdot \dfrac{-2}{\sqrt{3}} = \dfrac{16}{3\sqrt{3}} \\ f''\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \dfrac{-2}{\sqrt{3}} < 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{16}{3\sqrt{3}}\right) \text{ Máximo} \\ x = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} : \begin{cases} y = f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{16}{3\sqrt{3}} \\ f''\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} < 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{16}{3\sqrt{3}}\right) \text{ Mínimo} \end{cases}$$

b. Gráfica de la función. Se pide esbozar la gráfica de una función cúbica conocidos los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos. Teniendo en cuenta además que, las funciones polinómicas no tienen asíntotas y que sus tendencias en este caso son:

$$\text{Lím}_{x \to +\infty} \left(x^3 - 4x\right) = +\infty$$
$$\text{Lím}_{x \to -\infty} \left(x^3 - 4x\right) = -\infty$$

la gráfica tiene la forma:



Septiembre 2001. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función

$$f(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3$$

Calcúlense:

(a) Los intervalos donde es creciente y decreciente.

(b) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

Solución.

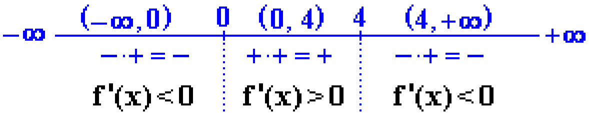
a. La monotonía de una función se estudia en el signo de la primera derivada con el siguiente criterio

- En los intervalos en los que f ‘(x) sea mayor que cero(positiva), la función será creciente
- En los intervalos en los que f ‘(x) sea menor que cero(negativa), la función será decreciente.

$$f(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3 \quad : \quad f'(x)=4x-x^2$$

Estudio del signo de f ‘(x) = x · (4 – x)

Sobre una recta real se estudian los intervalos generados por los ceros ó raíces de la derivada



teniendo en cuenta el criterio

$$\text{Sí } x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)\ f(x)\ \text{es decreciente}$$

$$\text{Sí } x\in(0,4)\ f(x)\ \text{es creciente}$$

b. La condición necesaria y suficiente para que una función tenga un extremo relativo en un punto, es que en dicho punto la primera derivada sea nula y la segunda derivada sea distinta de cero. Para diferenciar entre máximo y mínimo se tiene en cuenta el signo de la segunda derivada con el siguiente criterio:

- Sí f ‘’(x_o) < 0(negativa) en (x_o, f (x_o)) la función alcanza un máximo
- Sí f ‘’(x_o) > 0(positiva) en (x_o, f (x_o)) la función alcanza un mínimo

$$f(x)=2x^2-\frac{1}{3}x^3 \quad : \quad f'(x)=4x-x^2 \quad : \quad f''(x)=4-2x$$

$$f'(x)=4x-x^2=0:x\cdot(4-x)=0:\begin{cases} x=0:\begin{cases} f(0)=0 \\ f''(0)=4>0 \end{cases} \Rightarrow \text{En } (0,f(0))=(0,0) \text{ la función alcanza un mínimo} \\ x=4:\begin{cases} f(4)=\dfrac{128}{3} \\ f''(4)=-4>0 \end{cases} \Rightarrow \text{En } (4,f(4))=\left(4,\dfrac{128}{3}\right) \text{ la función alcanza un mínimo} \end{cases}$$

Junio 2001. Ejercicio 2B. (Puntuaci6n máxima: 3 puntos)

Dada la función

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

(a) Determínense sus máximos y mínimos relativos.

(b) Calcúlense sus puntos de inflexión.

Solución.

a. La condición necesaria y suficiente para que una función alcance un extremo relativo en un punto es que en dicho punto la primera derivada de la función sea cero, y la segunda sea distinta de cero, con el siguiente criterio:

$$\text{Sí f ‘}(x_o)=0 \text{ y: } \begin{cases} f''(x_o)>0\Rightarrow(x_o,f(x_o))\text{MÍNIMO} \\ f''(x_o)<0\Rightarrow(x_o,f(x_o))\text{MÁXIMO} \end{cases}$$

Los posibles puntos de extremo relativo se obtienen con los ceros de la 1ª derivada:

$$f'(x)=x^2+x-2; \qquad f'(x)=0; \qquad x^2+x-2=0;$$

resolviendo la ecuación de segundo grado

$$x = 1 \text{ ó } x = -2$$

cuya imágenes son:

$$f(1) = -\frac{1}{6} \qquad f(-2) = \frac{13}{3}$$

Los posibles extremos relativos de la función f(x) son los puntos $\left(-2, \frac{13}{3}\right) y \left(1, -\frac{1}{6}\right)$

Para comprobar si son extremos relativos se tendrá en cuenta el criterio de la 2ª derivada:

$$f''(x) = 2x + 1$$

sustituyendo los valores que anulan la 1ª derivada:

$$f''(-2) = 2\cdot(-2) + 1 = -3 < 0 \quad \text{En } \left(-2, \frac{13}{3}\right) \text{MÁXIMO}$$

$$f''(1) = 2\cdot 1 + 1 = 3 > 0 \quad \text{En } \left(1, -\frac{1}{6}\right) \text{MÍNIMO}$$

b. Punto de inflexión: La condición necesaria y suficiente para que una función tenga un punto de inflexión es que en dicho punto la segunda derivada de la función sea cero, y la tercera sea distinta de cero, con el siguiente criterio:

$$\text{Sí } f''(x_o) = 0 \ \text{ y: } \begin{cases} f'''(x_o) > 0 \Rightarrow (x_o, f(x_o)) \text{Inflesión}[\text{Convexa}(\cap) - \text{Concava}(\cap)] \\ f'''(x_o) < 0 \Rightarrow (x_o, f(x_o)) \text{Inflesión}[\text{Concava}(\cap) - \text{Convexa}(\cap)] \end{cases}$$

Los posibles puntos de inflexión se obtienen de los ceros de la 2ª derivada

$$f''(x) = 2x + 1; \quad f''(x) = 0; \quad 2x+1=0; \quad x=-\frac{1}{2}$$

cuya imagen en la función es:

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{25}{12} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{25}{12}\right)$$

Para comprobar si en $\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{25}{12}\right)$ $\exists$ un P.I. se tiene en cuenta el criterio de la 3ª derivada.

$$f'''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{25}{12}\right) \exists. \text{ P.I. Convexa}(\cap) - \text{Concava}(\cap)$$