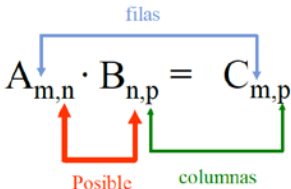


Matrices y determinantes

Definiciones de Matrices

$A = (a_{ij}) = A_{m \times n}$ $m = \text{n}^\circ \text{ filas y } n = \text{n}^\circ \text{ columnas}$ Orden o dimensión = $m \times n$ Matriz cuadrada $m=n$ Matriz rectangular $m \neq n$	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$	$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Orden 2×3 , dimensión 6 $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ Orden 3×2 , dimensión 6 En $A_{2 \times 3}$ el elemento $a_{12} = -4$ En $A_{3 \times 2}$ el elemento $a_{32} = 5$
Matriz fila $A_{1 \times n}$	Matriz con una sola fila	$A_{1 \times 4} = (2 \ 5 \ 0 \ 5)$
Matriz columna $A_{m \times 1}$	Matriz con una sola columna	$A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
Matriz nula, $O_{m \times n}$	Matriz en la que todos sus elementos son ceros	$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$
Matriz triangular superior (inferior)	Matriz cuadrada en la cual todos los elementos que están por debajo (arriba) de la diagonal son ceros	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
Matriz diagonal	Matriz cuadrada en la cual son nulos los elementos por debajo y por arriba de la diagonal.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
Matriz escalar	Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Matriz identidad, I_n	Matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal son unos	$I_1 = (1)$ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Matriz traspuesta, A^T	Matriz traspuesta de A es la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas	$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
Matriz simétrica: $A^T = A$	Matriz cuadrada que verifica que la traspuesta coincide con la propia matriz.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -7 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ es matriz simétrica
Matriz antisimétrica o hemisimétrica, $A = -A^T$	Matriz cuadrada en la que los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son números opuestos. La diagonal es cero	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

OPERACIONES		
Igualdad A=B	A=B Si: - Tienen la misma dimensión - elementos que ocupan el mismo lugar son iguales.	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & \sqrt{9} & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{4} & \sqrt[3]{1} \\ \sqrt[3]{8} & 3 & \sqrt[4]{49} \end{bmatrix}$
Suma y resta A+B o A-B	La suma de dos matrices de igual dimensión, es una matriz cuyos elementos se obtienen: sumando o restando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma posición.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+2 \\ 0+2 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
Propiedades	Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$ Elemento neutro: $A + (-A) = (-A) + A = O$	Elemento opuesto: $A + (-A) = O$ Conmutativa: $A+B = B+A$
Producto por un número k.A con $k \in \mathbb{R}$	Multiplicamos todos los elementos de la matriz por el número o escalar.	$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
Propiedades con $k, d \in \mathbb{R}$	Distributiva 1: $k(A + B) = kA + kB$ Distributiva 2: $(k + d) \cdot A = kA + dA$	Conmutativa: $k \cdot (d \cdot A) = (k \cdot d) \cdot A$ Elemento unidad: $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
Producto escalar (Matriz fila por matriz columna)	Para multiplicar una matriz fila por una matriz columna, se multiplica elemento a elemento y se suman los productos obtenidos. Se obtiene un número.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = (17)$
Multiplicación $A \cdot B = C$	Se multiplica cada fila de la 1º matriz por cada columna de la 2º. Producto escalar. El resultado es una matriz que tiene tantas filas como la 1º y tantas columnas como la 2º. 	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ La matriz C resultante tiene tantas filas (m) como A, y tantas columnas(p) como B..
Propiedades	Propiedad asociativa $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ Elemento neutro: $A \cdot I = A$ Propiedad conmutativa El producto de matrices en general no es conmutativo. $AB \neq BA$ Distributiva a izquierda: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ Distributiva a derecha: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ La división por matrices no está definida	- El producto de dos matrices puede ser la matriz nula O sin que lo sean ninguna de las dos es decir puede ser $A \cdot B = O$ con $A \neq O$ y $B \neq O$ - No verifica la propiedad simplificativa es decir de $A \cdot B = A \cdot C$ no podemos afirmar que $B = C$ - No verifica las igualdades notables
Potenciación de matrices A^n Solo cuadradas	$A^0 = I$ $A^1 = A$ $A^2 = A \cdot A$ $A^3 = A \cdot A^2$ $A^n = A \cdot A^{n-1}$	(Metodo inductivo) Para calcular la potencia n-ésima de una matriz, A^n , se calcula A , A^2 , A^3 , A^4 ,.... hasta que descubramos la ley de formación de las sucesiones que la forman Matriz ciclica) Hallamos las potencias sucesivas hasta hallar la matriz identidad. El periodo es el exponente con el que se obtiene la matriz identidad. Dividimos el exponente de la potencia entre el periodo y el resto es la potencia equivalente.

Determinantes		
Determinante A 	A cada matriz cuadrada A de orden n se le asigna un escalar (número real) denominado determinante de A , denotado por A o por det (A) .	A es el número obtenido como suma de todos los posibles productos de n elementos de la matriz, de manera que cada producto aparece necesariamente uno y sólo un elemento de cada fila y cada columna
Cálculo de Determinantes Orden 1	$ A = a_{11} = a_{11}$	
Cálculo de Determinantes Orden 2 (Regla Sarrus)	$ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 + 3 = 11$
Cálculo de Determinantes Orden 3 (Regla Sarrus)	(+) (-)	$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
Cálculo de Determinantes Orden 3 (Forma alternativa)	$ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$	$ A = ((-1) \cdot (-1) \cdot 1) + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - (0 \cdot (-1) \cdot 0) - (2 \cdot 3 \cdot (-1)) - (2 \cdot 1 \cdot 1)$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 6 - 2 = 5$
Cálculo de Determinantes Orden 3 (Forma alternativa)	$ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	
Menor complementario M_{ij}	Determinante que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j	$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $M_{21} = A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $M_{32} = A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$
Adjunto o cofactor $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$	Se llama adjunto o cofactor del elemento a_{ij} signo del elemento por el del determinante que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j	$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6$ $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(-6) = 6$
Matriz Adjunta Adj (A)	La matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto .	$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$ Orden 2 $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$ Orden 3
Ejemplo Matriz Adjunta	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 5 & 1 \\ -0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	
Cálculo de determinantes desarrollando por una fila (columna)	Si los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se multiplican por sus respectivos adjuntos y se suman los resultados se obtienen el determinante de la matriz inicial	$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -9\vec{i} - 7\vec{j} + 13\vec{k}$

Propiedades de los determinantes		
1	Si se multiplican los elementos de una fila o columna de una matriz por un número el determinante de la matriz se multiplica por ese número	$\det(F_1, F_2, \dots, kF_i, \dots, F_n) = k \cdot \det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)$ $\det(C_1, C_2, \dots, kC_j, \dots, C_n) = k \cdot \det(C_1, C_2, \dots, C_j, \dots, C_n)$
2	Si se multiplica una matriz cuadrada de orden n por un número el nuevo determinante es igual al anterior multiplicado por la potencia n-ésima del número. (n es el orden de la matriz)	$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$
3	Si en una matriz se intercambian dos filas o columnas, su determinante cambia de signo	$\det(F_1, F_2, F_3) = -\det(F_2, F_1, F_3)$
4	El determinante de una matriz cuadrada A coincide con el determinante de su traspuesta.	$ A = A^t $
5	Si dos filas (o columnas) de A son proporcionales, entonces el determinante es nulo.	$\det(F_1, \dots, F_i, \dots, kF_i, \dots, F_n) = 0$ $\det(C_1, \dots, C_i, \dots, kC_i, \dots, C_n) = 0$ $ A = 0$
6	Si una matriz tiene una fila o columna con todos sus elementos iguales a cero, el determinante es nulo.	$ A = 0$
7	El determinante de la matriz inversa es 1/ det(A)	$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
8	El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.	$ A \cdot B = A \cdot B \rightarrow A^k = A ^k$ $ A \cdot A^{-1} = 1 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ A }$
9	Si en una matriz cuadrada A de orden n, se remplaza una fila (o columna) por la suma de dicha fila (o columna) más una combinación lineal de alguna de las otras entonces su determinante no varía.	$\det(F_1, F_2, F_3) = \det(F_1, F_2, F_3 + \alpha F_1)$
10	Si en una matriz cuadrada A de orden n, una fila o columna es combinación lineal de las demás, su determinante es cero.	$ A = 0$
11	El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal	
12	El determinante de la matriz unidad es 1	$ I_n = 1$
13	Si una fila o columna de una matriz se remplaza en suma de dos o más filas o columnas, su determinante puede descomponerse en dos o más determinantes.	$\begin{vmatrix} a+b & p & q \\ c+d & r & s \\ e+f & t & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & q \\ c & r & s \\ e & t & u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & p & q \\ d & r & s \\ f & t & u \end{vmatrix}$
Calculo del rango por determinantes		
Definición: El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. Definición alternativa: El Rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo. El rango de una matriz no nula $A_{m \times n}$ siempre cumple 1 $1 \leq rg(A) \leq \min\{m, n\}$ Recomendaciones para el cálculo: - Si suprimimos las líneas dependientes (filas o columnas) el rango no varía, es decir: - Las líneas que son todos cero. - Las líneas que se repiten. - Las que sean múltiplos o combinaciones sencillas de otras. Método: 1º Si la matriz A es cuadrada de orden n se calcula det (A). Puede ocurrir: - Si $\det(A) \neq 0$ $rg(A) = n \rightarrow$ las filas de A son linealmente independientes. - Si $\det(A) = 0$ Hallo todos los menores de orden n-1. Con que uno solo de los determinantes es distinto de cero $rg(A) = n - 1 \rightarrow$ Las filas de A son linealmente dependientes. - Si todos los menores n-1 son cero. Hallo todos los menores de orden n-2. Si uno solo de los determinantes es distinto de cero $rg(A) = n - 2$. y así sucesivamente 2º Si la matriz A no es cuadrada analizar en primer lugar los mayores determinantes que se puedan extraer de la matriz. Y se opera igual que el caso anterior.		

Calculo del rango de una matriz que depende de un parámetro		
- Si la matriz es cuadrada se resuelve la ecuación $A =0$. Las soluciones son los casos que hay que estudiar. - Si la matriz es rectangular se resuelve la ecuación $A' =0$. Donde A' es una submatriz cuadrada de A con el mayor tamaño posible. Las soluciones son los casos que hay que estudiar. Da igual la submatriz que se elija, aunque no salgan los mismos casos, si se llega a las mismas conclusiones.		
Matriz inversa		
Propiedades de la traspuesta A^t	$(A^t)^t = A$ $(A + B)^t = A^t + B^t$ $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$ $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$	
Matriz regular	Matriz invertible. Una matriz es regular si y solo si su determinante es distinto de cero.	$\exists A^{-1} \leftrightarrow A \neq 0$
Matriz singular	Matriz no invertible. Una matriz es singular si y solo si su determinante es cero.	$\nexists A^{-1} \leftrightarrow A = 0$
Matriz ortogonal,	Matriz que al multiplicarla por la traspuesta nos da la identidad.	$A \cdot A^t = I \rightarrow A^{-1} = A^t$
Inversa A^{-1}	$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$	Las matrices inversas solo existen para las matrices cuadradas y se deben cumplir que $ A \neq 0$.
Calculo de la Inversa A^{-1}	$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n$ $A^{-1} = \frac{1}{ A } \cdot [\text{Adj}(A)]^t = \frac{1}{ A } \cdot \text{Adj}(A^t)$	
Propiedades de la inversa A^{-1}	$(A^{-1})^{-1} = A$ $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$	$I^{-1} = I$ $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ $A^{-1} = \frac{1}{ A }$ si A es regular
Usamos: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ La inversa debe de multiplicar por el mismo lado que lo estaba haciendo la original. (No existe propiedad conmutativa). $AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$ $XA = B \rightarrow XA A^{-1} = B A^{-1} \rightarrow XI = B A^{-1} \rightarrow X = B A^{-1}$ Ejemplo: $(X - XA) + C = B \rightarrow X(I - A) = B - C \rightarrow X = (B - C)(I - A)^{-1}$ Ejemplo: $X \cdot A^{-1} + B = C \rightarrow X \cdot A^{-1} = (C - B) \rightarrow X \cdot A^{-1} \cdot A = (C - B) \cdot A \rightarrow X \cdot I = (C - B) \cdot A \rightarrow X = (C - B) \cdot A$ Hay que determinar siempre si el producto lo hacemos por la izquierda o por la derecha. A veces es necesario sacar factor común. Ejemplo: $XA - 2X = A \rightarrow XA - X \cdot 2I = A \rightarrow X(A - 2I) = A \rightarrow X = A(A - 2I)^{-1}$ Algunas veces no se puede despejar mediante la inversa: Ejemplo: $AX = XA$ Para estos casos opero con incógnitas e igualando matrices. Resuelvo sistema resultante.		
Sistemas matriciales		
Los sistemas de ecuaciones matriciales se resuelven de forma análoga a los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir: por sustitución, igualación o reducción. La X e Y son matrices.		