Examen Matrices y Determinantes

Instrucciones para el examen:

- Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
- **CALIFICACIÓN:** Cada ejercicio tiene una puntuación diferentes y en el enunciado se especifica la valoración de cada apartado. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
- **TIEMPO:** 50 minutos.
- Aunque utilices calculadora, muestra claramente los pasos y tu conocimiento de los conceptos y las fórmulas matemáticas que se están aplicando.
- Evita el uso de decimales. Expresa los resultados en forma de fracciones y radicales. En caso de tener que usarlos, redondea a la centésima.
- Sé claro/a, limpio/a, ordenado/a y cuida la ortografía. No se corregirá lo que no se entienda claramente.

1. **(4 puntos)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz *A-mI* según los valores de *m*.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de *A-2I*.

c) (1 punto) Resolver la ecuación *XA=A+2X*

SOLUCIÓN:

a) Calculamos *A-mI* y estudiamos su determinante

$$A-mI=\begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 0 & 3-m & 0 \\ 0 & -1 & 3-m \end{pmatrix};\ |A-mI|=\begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 0 & 3-m & 0 \\ 0 & -1 & 3-m \end{vmatrix}=-m\begin{vmatrix} 3-m & 0 \\ -1 & 3-m \end{vmatrix}=-m(3-m)^2$$

$$|A-mI|=-m(3-m)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases} m_1=0 \\ m_2=3 \end{cases}$$

Por tanto, si $m\neq 0{,}3$ el $|A|\neq 0$ y el rango de la matriz es 3.
Estudiemos ahora por separado los otros dos casos que nos quedan.

$\boxed{m_1=0}$

$$A-0I=A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=9\neq 0\Rightarrow rg(A)=2$$

$\boxed{m_2=3}$

$$A-3I=A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=3\neq 0\Rightarrow rg(A)=2$$

b) La matriz inversa de A-2I se puede calcular porque su determinante es distinto de cero.

$$|A-2I| = -2(3-2)^2 = -2$$

Calculamos todos los adjuntos de $B = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{B_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1} \qquad \boldsymbol{B_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0} \qquad \boldsymbol{B_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0}$$

$$\boldsymbol{B_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2} \qquad \boldsymbol{B_{22} = +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2} \qquad \boldsymbol{B_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2}$$

$$\boldsymbol{B_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1} \qquad \boldsymbol{B_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0} \qquad \boldsymbol{B_{33} = +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2}$$

$$\boldsymbol{A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Por último, para calcula la inversa, trasponemos y dividimos por el determinante:

$$B^{-1} = \frac{(B^*)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Para resolver la ecuación primero despejamos X:

$$XA = A + 2X \rightarrow \mathrm{XA} - 2\mathrm{X} = \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{X(A} - 2\mathrm{I)} = \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{X} = \mathrm{A} \cdot (A - 2I)^{-1}$$

Sustituyendo cada matriz por su valor y multiplicando, obtenemos el valor de X:

$$X = A \cdot (A - 2I)^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

---

2. **(3 puntos)** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1'5 puntos). Hallar las condiciones que deben cumplir a, b y c, para que se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$.

b) (1'5 puntos). Para $a = b = c = 1$, calcular las cuatro primeras potencias de B, y demostrar por inducción una fórmula para B^n

a)

$$A \cdot B = B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2c & 2c+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{5a}+2c = \cancel{5a}+2b \rightarrow \cancel{2}c = \cancel{2}b \ ; \quad c=b$$
$$\cancel{5b}+2c = 2a+\cancel{5b} \rightarrow \cancel{2}c = \cancel{2}a \ ; \quad c=a$$
$$2a+\cancel{5c} = \cancel{5c}+2c \rightarrow \cancel{2}a = \cancel{2}c \ ; \quad a=c$$
$$2b+\cancel{5c} = 2c+\cancel{5c} \rightarrow \cancel{2}b = \cancel{2}c \ ; \quad b=c$$

$$\boxed{a=b=c}$$

condición pedida

b) Si $a=b=c=1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2^0

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2^1

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2^2

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2^3

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^1 = 1 = 2^0$$
$$B^2 = 2 = 2^1$$
$$B^3 = 4 = 2^2$$
$$B^4 = 8 = 2^3$$
$$\vdots$$
$$B^n = 2^{n-1}$$

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. (3 puntos) Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$, empleando para ello las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & X & 2 & 2 \\ 2 & 2 & X & 3 \\ 3 & 3 & 3 & X \end{vmatrix} = 0$$

fuera $(X+6)$ de F_1

$$\begin{vmatrix} X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & X & 2 & 2 \\ 2 & 2 & X & 3 \\ 3 & 3 & 3 & X \end{vmatrix} \overset{F_1+F_2+F_3+F_4}{=} \begin{vmatrix} X+6 & X+6 & X+6 & X+6 \\ 1 & X & 2 & 2 \\ 2 & 2 & X & 3 \\ 3 & 3 & 3 & X \end{vmatrix} = (X+6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & X & 2 & 2 \\ 2 & 2 & X & 3 \\ 3 & 3 & 3 & X \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} C_4-C_3 \\ C_3-C_2 \\ C_2-C_1 \end{matrix} = (X-6) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & 2-X & 0 \\ 2 & 0 & X-2 & 3-X \\ 3 & 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} \overset{F_3+F_4}{=} (X-6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & 2-X & 0 \\ 5 & 0 & X-2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{F_2+F_3}{=} (X-6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & X-1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & X-2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = \boxed{(X-6)(X-1)(X-2)(X-3)}$$

$$(X-6)(X-1)(X-2)(X-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} X-6=0 \rightarrow X=6 \\ X-1=0 \rightarrow X=1 \\ X-2=0 \rightarrow X=2 \\ X-3=0 \rightarrow X=3 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} X=6 \\ X=1 \\ X=2 \\ X=3 \end{matrix}}$$