Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Resuelve las siguientes integrales. Son inmediatas, pero puedes calcularlas por cualquier otro método.

   a) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}\,dx$

   b) $\int \frac{x}{3x^2+1}\,dx$

2. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Resuelve las siguientes integrales. En la primera de ella tendrás que aplicar el método de integración por partes dos veces. La segunda es una integral racional.

   a) $\int 2x(\ln x)^2\,dx$

   b) $\int \frac{3x}{x^2+3x-10}\,dx$

3. Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=1-x$:

   a) **[1 punto]** Dibujar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

   b) **[1 punto]** Calcular el área de dicho recinto.

4. **[2 puntos]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, resuelve la siguiente ecuación matricial: $ABX-CX=2C$.

5. **[2 puntos]** Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2\\ x & 2x+3 & 3x+4\\ x & 2x+5 & 3x+4 \end{vmatrix}$$

Soluciones

1. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Resuelve las siguientes integrales. Son inmediatas, pero puedes calcularlas por cualquier otro método.

a) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx = \int \frac{5x}{x^2}dx + \int \frac{\sqrt{3x}}{x^2}dx = 5\int \frac{x}{x^2}dx + \sqrt{3}\int \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx = 5\int \frac{1}{x}dx + \sqrt{3}\int x^{-\frac{3}{2}}dx =$

$= 5\ln x + \sqrt{3}\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C = 5\ln x - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}} + C =$

b) $\int \frac{x}{3x^2+1}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+1}dx = \frac{1}{6}\ln\left(3x^2+1\right) + C$

2. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Resuelve las siguientes integrales. En la primera de ella tendrás que aplicar el método de integración por partes dos veces. La segunda es una integral racional.

a) $\int 2x(\ln x)^2 dx = \left[\begin{matrix} u = (\ln x)^2 & du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{2\ln x}{x}dx \\ 2x\,dx & v = x^2 \end{matrix}\right] = x^2(\ln x)^2 - \int x^2 \frac{2\ln x}{x}dx =$

$= x^2(\ln x)^2 - \int 2x\ln x\,dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = 2x\,dx & v = x^2 \end{matrix}\right] = x^2(\ln x)^2 - \left(x^2\ln x - \int x^2\frac{1}{x}dx\right) =$

$= x^2(\ln x)^2 - x^2\ln x + \int x\,dx = x^2(\ln x)^2 - x^2\ln x + \frac{x^2}{2} + C$.

b) $\int \frac{3x}{x^2+3x-10}dx$. Como $x^2+3x+10 = (x-2)(x+5)$, tenemos:

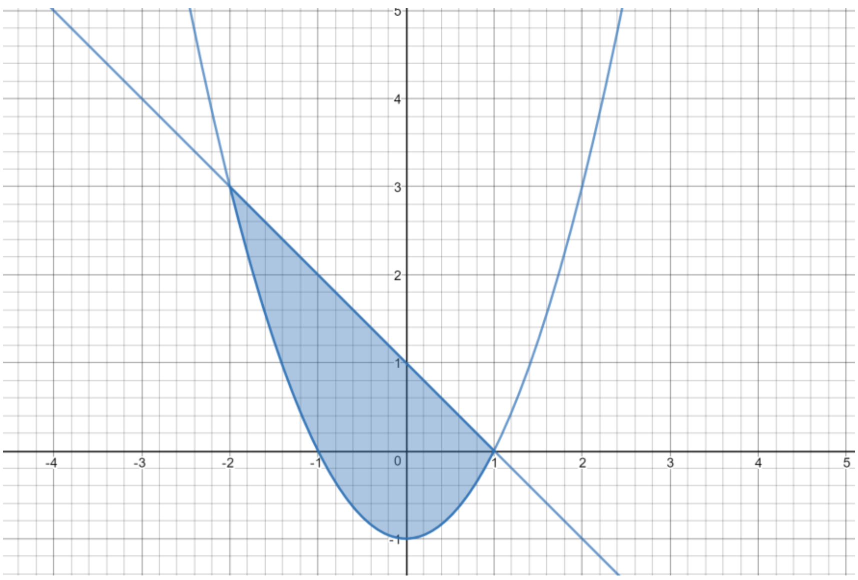
$\frac{3x}{x^2+3x-10} = \frac{3x}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)} \Rightarrow 3x = A(x+5)+B(x-2)$

Si $x=-5 \Rightarrow -15 = -7B \Rightarrow B = \frac{15}{7}$. Si $x=2 \Rightarrow 6 = 7A \Rightarrow A = \frac{6}{7}$. Por tanto:

$\int \frac{3x}{x^2+3x-10}dx = \int \frac{6/7}{x-2}dx + \int \frac{15/7}{x+5}dx = \frac{6}{7}\ln(x-2) + \frac{15}{7}\ln(x+5) + C$.

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2-1$ y $g(x) = 1-x$:

a) **[1 punto]** Dibujar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.



b) **[1 punto]** Calcular el área de dicho recinto.

$$A=\int_{-2}^{1}\left(\left(1-x\right)-\left(x^2-1\right)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\Big]_{-2}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)=\frac{-2-3+12}{6}-\frac{8-6-12}{3}=\frac{7}{6}+\frac{10}{3}=\frac{7}{6}+\frac{20}{6}=\frac{27}{6}\ \text{uds}^2$$

4. **[2 puntos]** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, resuelve la siguiente ecuación matricial: $ABX-CX=2C$.

$ABX-CX=2C\Rightarrow\left(AB-C\right)X=2C\Rightarrow X=\left(AB-C\right)^{-1}2C$. Si llamamos $D=AB-C$, $X=D^{-1}\cdot 2C$.

Así: $D=AB-C=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1&3\\8&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2&3\\9&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$.

El determinante de la anterior es $|D|=-4-\left(-3\right)=-1$, luego tiene inversa por ser distinto de cero.

$D^d=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&-3&-2\\-1&15&12\end{pmatrix}$; $\left(D^d\right)^t=\begin{pmatrix}0&0&-1\\2&-3&15\\1&-2&12\end{pmatrix}$. Por tanto, la matriz inversa de la matriz D es

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}\cdot\left(D^d\right)^t=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\2&-3&15\\1&-2&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&3&-15\\-1&2&-12\end{pmatrix}$$. Finalmente:

$$X=D^{-1}\cdot 2C=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&3&-15\\-1&2&-12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&4&2\\2&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-40&38&-24\\-30&30&-20\end{pmatrix}$$

5. **[2 puntos]** Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix}x&2x+1&3x+2\\x&2x+3&3x+4\\x&2x+5&3x+4\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}x&2x+1&3x+2\\x&2x+3&3x+4\\x&2x+5&3x+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&2x&3x+2\\x&2x&3x+4\\x&2x&3x+4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&3x+2\\x&3&3x+4\\x&5&3x+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&2x&3x\\x&2x&3x\\x&2x&3x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&2x&2\\x&2x&4\\x&2x&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&3x\\x&3&3x\\x&5&3x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&2\\x&3&4\\x&5&4\end{vmatrix}=$$

[los tres primeros determinantes anteriores son cero por poseer al menos una columna proporcional a la primera] $=\begin{vmatrix}x&1&2\\0&2&2\\0&4&2\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}2&2\\4&2\end{vmatrix}=x\left(4-8\right)=-4x$.