Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[4 puntos; 2 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes integrales usando o bien el método de integración por cambio de variable, o bien el método de integración por partes.

   a) $\int \sqrt{x-4}\,(x+5)\,dx$

   b) $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$

2. **[3 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes integrales racionales.

   a) $\int \frac{1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$

   b) $\int \frac{2x-1}{x^3+2x^2+x}\,dx$

3. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) **[1 punto]** ¿Para qué valores de m existe A^{-1}?

   b) **[2 puntos]** Para $m=1$, halla la matriz X tal que $XA+B=C$

Soluciones

1. **[4 puntos; 2 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes integrales usando o bien el método de integración por cambio de variable, o bien el método de integración por partes.

a) $$\int \sqrt{x-4}\,(x+5)\,dx = \begin{bmatrix} x-4=t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \\ x = t^2+4 \Rightarrow x+5 = t^2+9 \end{bmatrix} = \int \sqrt{t^2}\,(t^2+9)\,2t\,dt = \int 2t^2(t^2+9)\,dt =$$

$$= \int (2t^4+18t^2)\,dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{18t^3}{3} + C = \frac{2t^5}{5} + 6t^3 + C = \frac{2\sqrt{(x-4)^5}}{5} + 6\sqrt{(x-4)^3} + C$$

b) $$\int \ln(1+x^2)\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(1+x^2) & dv = dx \\ du = \dfrac{2x}{1+x^2} & v = x \end{bmatrix} = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$$

La integral $\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$ es racional. Haciendo la división se tiene que $2x^2 = 2(x^2+1)-2$ y de aquí obtenemos $\frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - \frac{2}{x^2+1}$. Por tanto, $\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = \int\left(2-\frac{2}{x^2+1}\right)dx = 2x - 2\,\mathrm{arctg}\,x + C$. Así pues:

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,arctg\,x + C$$

2. **[3 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes integrales racionales.

a) $$\int \frac{1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx$$

Como $x^3-2x^2-x+2 = (x+1)(x-1)(x-2)$, tenemos que: $\frac{1}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{1}{(x+1)(x-1)(x-2)} =$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$. Entonces:

$$1 = A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1)$$

Para $x=1$ se tiene que $1=-2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Para $x=-1$ tenemos $1=6A \Rightarrow A=\frac{1}{6}$. Y, finalmente, para $x=2$ se obtiene $1=3C \Rightarrow C=\frac{1}{3}$. Por tanto:

$$\int \frac{1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx = \int \frac{1/6}{x+1}\,dx + \int \frac{-1/2}{x-1}\,dx + \int \frac{1/3}{x-2}\,dx = \frac{1}{6}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{3}\ln(x-2) + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3+2x^2+x}\,dx$

Como $x^3+2x^2+x = x\left(x^2+2x+1\right) = x\left(x+1\right)^2$, tenemos que $\dfrac{2x-1}{x^3+2x^2+x} = \dfrac{2x-1}{x\left(x+1\right)^2} =$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{\left(x+1\right)^2} = \frac{A\left(x+1\right)^2 + Bx\left(x+1\right) + Cx}{x\left(x+1\right)^2} \Rightarrow 2x-1 = A\left(x+1\right)^2 + Bx\left(x+1\right) + Cx.$$

Para $x=-1$ se obtiene $-3=-C \Rightarrow C=3$. Para $x=0$ tenemos $A=-1$. Y para $x=1$ se tiene que $1=4A+2B+C \Rightarrow 1=-4+2B+3 \Rightarrow 1=-1+2B \Rightarrow 2B=2 \Rightarrow B=1$. Por tanto:

$$\int \frac{2x-1}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{\left(x+1\right)^2}\,dx = -\ln x + \ln\left(x+1\right) - \frac{3}{x+1} + C$$

3. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** ¿Para qué valores de *m* existe A^{-1}?

Sabemos que existe la inversa de una matriz cuadrada si, y sólo si, su determinante es distinto de cero. En este caso, como $|A| = 2m$, tenemos que $|A| = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Por tanto existe A^{-1} siempre y cuando $m \neq 0$.

b) **[2 puntos]** Para $m=1$, halla la matriz X tal que $XA+B=C$.

$$XA+B=C \Rightarrow XA=C-B \Rightarrow X=\left(C-B\right)A^{-1}$$

Si $m=1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|A| = 2$.

La matriz adjunta es $A^d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Por tanto, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A^t\right)^d = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $X = \left(C-B\right)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.