Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobar que A es una matriz regular y hallar su inversa.

Solución.–

Calculamos en primer lugar el determinante de la matriz A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{F_3-2F_2}{\underset{\downarrow}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{desarrollo } C_2}{\underset{\downarrow}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies A \text{ regular}$$

Para calcular la inversa de la matriz A, que ya sabemos existe, vamos a utilizar la técnica que hemos explicado brevemente y que explicamos aquí con mayor detalle.

PASO 1.– *Escribimos la matriz ampliada $(A|\, I)$.*

$$(A|\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

PASO 2.– *Escogemos como columna pivote la columna no nula situada más a la izquierda.*

$$(A|\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

columna pivote

PASO 3.– *Seleccionamos como pivote una entrada no nula en la columna pivote. Si es necesario intercambiamos filas para mover esa entrada a la posición pivote.*

$$(A|\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \overset{\text{pivote}}{\overset{\downarrow}{\boxed{1}}} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

PASO 4.– *Utilizamos operaciones elementales de fila de tipo reemplazo para conseguir ceros debajo del pivote.*

$$(A|\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3-2F_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

PASO 5.– *Ignoramos la fila que contiene el pivote y todas las filas, si las hubiere, por encima de ella ("bajamos la escalera"). Repetimos los pasos 2–4 a la submatriz que queda.*

Aplicamos este proceso hasta llegar a la última fila.

$$(A|\,I) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2\leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3-2F_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

PASO 6.– *Transformamos los elementos de la diagonal principal en 1 utilizando la operación elemental de fila de escalonamiento.*

$$(A|\,I) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2\leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3-2F_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{1/4F_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

PASO 7.– *Comenzando con el pivote más a la derecha y trabajando hacia arriba y hacia la izquierda ("subiendo la escalera"), hacemos ceros por encima de cada pivote mediante operaciones de fila de tipo reemplazo. Si trabajamos hacia arriba y hacia la izquierda no perdemos los ceros conseguidos anteriormente.*

$$(A|\,I) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2\leftrightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3-2F_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{1/4F_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right) \overset{\substack{F_1+F_3\\ F_2-2F_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right) \overset{F_1-F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Si nos parece oportuno podemos comprobar el resultado, demostrando por ejemplo que:

$$A \cdot A^{-1} = I_3$$

En general, es recomendable seguir los pasos aquí indicados, pero hay ocasiones en las que puede resultarnos más cómodo no seguir estos pasos y utilizar algún "atajo".

Proponemos a continuación otro ejemplo que ilustra esta situación.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar su inversa.

Solución.–

Se recomienda al alumno que siga los 7 pasos antes indicados y que compare con el método aquí utilizado.

$$\begin{aligned} (A|\, I) \quad &= \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{i=2,3,4}{\overset{F_i - F_{i-1}}{\sim}} \\ &\sim \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{i=1,2,3}{\overset{F_i - F_{i+1}}{\sim}} \\ &\sim \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = (I\ |A^{-1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$