

MATRICES Y DETERMINANTES

1.- Determine los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } X = -5/4 \quad Y = -7/4$$

2.- Determine la matriz X de dimensiones 2x2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$$

3.- Un importador de globos los importa de dos colores. Naranja y rojo y los envía en paquetes de 2, 5 y 10 unidades que vende a los siguientes precios:

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Naranja	4	8	12
Rojo	3	5	8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Naranja	Rojo
2 unidades	700.000	50.000
5 unidades	600.000	40.000
10 unidades	500.000	500.000

Se pide:

- Resumir la información anterior en dos matrices A y B: A será una matriz que recoja las ventas en un año y B será una matriz que recoja los precios.
- Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz $A * B$ y dar su significado.
- Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz $B * A$ y dar su significado.

4.- Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hallar las matrices X e Y tales que:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = M \\ -3X + 4Y = -2N \end{cases} \quad \text{Sol: } X = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 16 & -10 & 8 \\ -12 & -8 & -8 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 10 & -8 & 5 \\ -9 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

5.-Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } \begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Hallar $[A^t \cdot A^{-1}]^2 \cdot A$.

6.- Determinar una matriz X tal que $A + 2XB = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Sol: } X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

7.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Demuestra que $A^2 = 2A - I$ donde I es la matriz identidad. $\rightarrow$ Sí se cumple
 b) Halla las matrices A^3 y A^4 y exprésalas en función de A e I .

Sol: $A^3 = 3A - 2I$; $A^4 = 4A - 3I$

8.- Discutir y resolver, si es posible, en función del valor del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + (\lambda + 1)y + z &= 0 \\ x + y + (\lambda + 1)z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Sol: Si $\lambda \neq 0$ ó $\lambda \neq 2$ el sistema es S.C.D ; Si $\lambda = 0$ ó $\lambda = 2$ el sistema es S.C.I

9.- Calcúlese la matriz X tal que $AX = A + B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

10.- Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula el producto $A \cdot B^t \cdot B \cdot A^t$.

Sol: Da la matriz de 1x1 cero, o el número cero

11.- Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discútase el sistema según los valores de a .
 b) Resuélvase el sistema para $a = -1$.

12.- Sea: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Hallar las matrices B de orden 2 x 2 tales que:

a) $A \cdot B = 0$

b) $A \cdot B = B \cdot A = 0$

Sol: a) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2d \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -2a & 0 \end{pmatrix}$

13.-Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

hallar la inversa de $A - B$ y la matriz X tal que $X \cdot (A - B) = A + B$.

Sol: $X = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

14.- Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Sol: Rg } A = 3$$

15.- Determina los valores de m para los cuales:

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{verifique} \quad X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0.$$

Sol: Se cumple para $m = 2$ y $m = \frac{1}{2}$

16.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$ calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Sol: a) $\frac{5}{2}$ b) 5

17.- Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sean compatibles:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m+1 \end{array} \right\}$$

Sol: Si $m \neq 0$ ó $m \neq 1$ el sistema es S.C.D ; Si $m = 0$ el sistema es S.C.I; Si $m = 1$ es S.I

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{array} \right\}$$

Sol: Si $a \neq 2$ el sistema es S.I ; Si $a = 2$ el sistema es S.C.D

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} (1-k)x + y = 0 \\ x + (1-k)y + z = 0 \\ y + (1-k)z = 0 \end{array} \right\}$$

Sol: Si $k \neq 1$ el sistema es S.C.D ; Si $k = 1$ el sistema es S.C.I;

18.- Hallar, si existe, una matriz cuadrada 2×2 , A, que cumpla las siguientes condiciones:

- 1) Coincide con su traspuesta.
- 2) Verifica la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- 3) Su determinante vale 9.

19.- Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = (a-1)(a+2) \\ x + ay + z = (a-1)^2(a+2) \\ x + y + az = (a-1)^3(a+2) \end{array} \right\}$$

- a) Comprobar que es compatible para todo valor de a.
- b) Resolverlo para $a = -2$.

20.- Determina para que valores de x tiene inversa la matriz y calcúlala.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix} \rightarrow \text{Sol: Si } x = 0 \text{ no tiene inversa y si } x \neq 0 \text{ tiene inversa.}$$

21.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcular las matrices A^2 , A^3 , A^4 y A^5 .

Obtener razonadamente A^n para $n > 5$.

Sol: A partir de A^3 la matriz es nula $\rightarrow A^n = O$

22.- Se dice que dos matrices cuadradas, A y B, de orden $n \times n$, son semejantes si existe una matriz inversible, P, tal que, $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, donde P^{-1} denota la matriz inversa de P. Determine si son semejantes las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol: No son semejantes porque solo lo verifica si la matriz P, es la matriz nula.

23.- Calcula el valor de la matriz X sabiendo que:

$$2A - AX = BX \quad \text{siendo} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: } X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

24.- Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del parámetro a , y resolverlo cuando sea posible:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = a \\ x - 2z = 3 \\ 2x - 3z = a \end{cases}$$