TRIGONOMETRÍA. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sabiendo que $\text{sen}\alpha = 0,86$ calcula las demás razones trigonométricas directas e inversas

Solución:

Las razones trigonométricas directas son el *seno*, el *coseno* y la *tangente*, y las inversas la *cosecante*, la *secante* y la *cotangente*. Vamos a relacionar todas ellas con el seno, que es el dato que nos dan:

- $\text{sen}\alpha = 0,86$
- El coseno se deduce a partir de la ecuación fundamental $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$$

Sustituyendo datos:

$$\cos\theta = \sqrt{1-\text{sen}^2\theta} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-0,86^2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

- La tangente buscada se deduce de la fórmula fundamental $\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\theta$. Sólo hay que sustituir en ella los valores conocidos:

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\theta \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{0,86}{0,5} \Rightarrow \text{tg}\theta = 1,72$$

- La cosecante es la inversa del seno.

$$\text{cosec}\alpha = \text{sen}^{-1}\alpha = \frac{1}{0,86} = 1,26$$

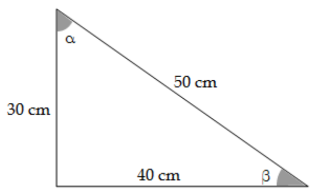
- La secante es la inversa del coseno.

$$\sec\alpha = \cos^{-1}\alpha = \frac{1}{1/2} = 2$$

- La cotangente es la inversa de la tangente.

$$\text{cotg}\alpha = \text{tg}^{-1}\alpha = \frac{1}{1,72} = 0,58$$

2. Calcula las relaciones trigonométricas directas de α y β



Solución:

Las razones trigonométricas directas son el *seno*, el *coseno* y la *tangente.*

- Para el ángulo α:

$$\text{sen}\alpha = \frac{40}{50} \Rightarrow \text{sen}\alpha = 0,8,$$

$$\cos\alpha = \frac{30}{50} \Rightarrow \cos\alpha = 0,6$$

$$tg\alpha = \frac{40}{30} \Rightarrow tg\alpha = 1,33$$

Observa que se cumple que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

- Para el ángulo β:

$$sen\beta = \frac{30}{50} \Rightarrow sen\beta = 0,6$$

$$\cos\beta = \frac{40}{50} \Rightarrow \cos\beta = 0,8$$

$$tg\beta = \frac{30}{40} \Rightarrow tg\beta = 0,75$$

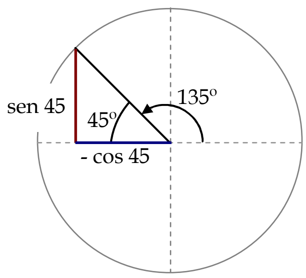
Observa que también se cumple que $sen^2\beta + \cos^2\beta = 1$, como no podía ser de otra manera.

3. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

- 135º

Solución:

El ángulo 135º está en el 2º cuadrante. Será equivalente a un ángulo de 45º para el que sen45 es positivo y cos45 es negativo, tal como se indica en la figura.



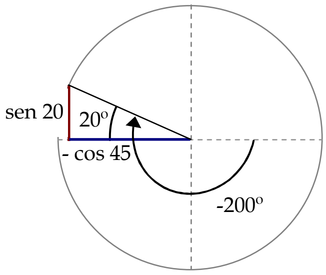
- \- 560º

Solución:

Como el ángulo es mayor que 360º lo tratamos del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l|l} 560 & 360 \\ \hline 200 & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \text{ vuelta} \cdot 360^{\circ} + 200^{\circ}$$

El ángulo que tenemos que manejar es -200º. Ello es equivalente a un ángulo de 20º en el segundo cuadrante, en donde sen20 es positivo y cos20 es negativo



4. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que α está en el 4º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

<u>Solución</u>:

Si α está en el 4º cuadrante entonces $\cos\alpha$ es positivo y $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo.

El $\operatorname{sen}\alpha$ lo deducimos usando la relación fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Así: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\right)} = -\frac{1}{2}$

El resto de razones trigonométricas se obtiene de forma inmediata:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\sqrt{3};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{co}\sec\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = -2$$

5. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y que α está en el 2º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

<u>Solución</u>:

Si α está en el 2º cuadrante entonces $\cos\alpha$ es negativo y $\operatorname{sen}\alpha$ es positivo.

- Utilizamos la relación $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ para hallar $\operatorname{sen}\alpha$:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Hallamos $\cos\alpha$ a partir de $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$:

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{3}{2}.$$

- Las obtención de las razones trigonométricas inversas es inmediata:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{2}{3};\quad \operatorname{co}\sec\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}};\quad \cot\operatorname{g}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\sqrt{3}$$

6. Si α está en el tercer cuadrante y $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{2}$, determina las siguientes razones trigonométricas:

- $\operatorname{sen}(180^{\circ} - \alpha)$

  Solución:

  Como α está en el tercer cuadrante el $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo, como bien indica el enunciado. Pero, en general, $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180 - \alpha)$, así que $\operatorname{sen}(180 - \alpha) = -\dfrac{1}{2}$

- $\operatorname{sen}(180^{\circ} + \alpha)$

  Solución:

  Como α está en el tercer cuadrante el $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo. Además: $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(180 - \alpha)$, así que $\operatorname{sen}(180 - \alpha) = \dfrac{1}{2}$

- $\cos(180^{\circ} - \alpha)$

  Solución:

  Como α está en el tercer cuadrante $\cos\alpha$ es negativo. Además: $\cos\alpha = -\cos(180 - \alpha)$.

  Deduzcamos $\cos\alpha$:

  Usamos la relación fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

  $$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

Entonces, $\cos(180-\alpha)=\frac{3}{4}$

- $\cos(180^o+\alpha)$

  Solución:

  Se cumple que $\cos\alpha=-\cos(180+\alpha)$. Entonces:

  $-\frac{3}{4}=-\cos(180+\alpha) \Rightarrow \cos(180+\alpha)=\frac{3}{4}$

- $\operatorname{tg}(180^o-\alpha)$

  Solución:

  $$\operatorname{tg}(180^o-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(180^o-\alpha)}{\cos(180^o-\alpha)}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

- $\operatorname{tg}(180^o+\alpha)$

  Solución:

  $$\operatorname{tg}(180^o+\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(180^o+\alpha)}{\cos(180^o+\alpha)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

B.2. Demostración de igualdades trigonométricas:

7. $\frac{2\operatorname{sen}\alpha+3}{2\operatorname{tg}\alpha+3\sec\alpha}=\cos\alpha$

Solución:

- Vamos a tratar de manipular el lado izquierdo de la igualdad, para convertirlo en $\cos\alpha$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ y que $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$, podemos escribir:

  $$\frac{2\operatorname{sen}\alpha+3}{2\operatorname{tg}\alpha+3\sec\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha+3}{2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3}{\cos\alpha}}$$

- Operamos esa expresión con el fin de simplificarla:

$$\frac{2\text{sen }\alpha+3}{2\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3}{\cos\alpha}}=\frac{2\text{sen }\alpha+3}{\frac{2\text{sen }\alpha+3}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha\,\cancel{(2\text{sen }\alpha+3)}}{\cancel{2\text{sen }\alpha+3}}=\cos\alpha$$

- Como acabamos de ver, la igualdad se cumple.

8. $\text{tg}^2\alpha=\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A=\text{tg}^2\alpha=\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

En $B=\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}$ vamos a reescribir el denominador de una forma más conveniente:

Teniendo en cuenta que $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ se deduce que $1-\text{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha$. Entonces:

$$B=\frac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}=\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Observamos que A=B, luego la identidad es verdadera.

9. $\text{tg}(\alpha)\cdot\text{cotg}(\alpha)-\dfrac{2\text{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\text{cotg}^2(\alpha)}}=[\cos(\alpha)+\text{sen}(\alpha)]\cdot\left(\dfrac{1}{\sec(\alpha)}-\dfrac{1}{\text{cosec}(\alpha)}\right)$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A = tg(\alpha)\cdot cotg(\alpha) - \frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{1+cotg^2(\alpha)}} = tg(\alpha)\cdot\frac{1}{tg(\alpha)} - \frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{1+\frac{1}{tg^2(\alpha)}}} =$$

$$= 1 - \frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{1+\frac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}}} = 1 - \frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{\frac{sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}}} = 1 - \frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{sen^2(\alpha)}}} =$$

$$= 1 - 2\cdot sen^2(\alpha)$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$B = [cos(\alpha)+sen(\alpha)]\cdot\left(\frac{1}{sec(\alpha)} - \frac{1}{cosec(\alpha)}\right) =$$

$$= [cos(\alpha)+sen(\alpha)]\cdot[cos(\alpha)-sen(\alpha)] =$$

$$= cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha) = 1 - sen^2(\alpha) - sen^2(\alpha) = 1 - 2\cdot sen^2(\alpha)$$

Observamos que A=B, luego la identidad es cierta.

10. $\frac{1}{sec^2\alpha} = sen^2\alpha\cdot cos^2\alpha + cos^4\alpha$

Solución:

Manipulamos primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A = \frac{1}{sec^2\alpha} = cos^2\alpha$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$B = sen^2\alpha\cdot cos^2\alpha + cos^4\alpha = \left(sen^2\alpha + cos^2\alpha\right)\cdot cos^2\alpha = cos^2\alpha$$

Observamos que A=B, luego la identidad es cierta.

11. $cosec^4\alpha - 1 = 2\,cotg^2\alpha + cotg^4\alpha$

Solución:

Manipulamos el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$A = \operatorname{cosec}^4\alpha - 1 = \left(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1\right)\left(\operatorname{cosec}^2\alpha + 1\right)$

Recordamos que $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha$. Entonces:

$\left(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1\right)\left(\operatorname{cosec}^2\alpha + 1\right) = \left(1 + \operatorname{cotg}^2\alpha - 1\right)\left(1 + \operatorname{cotg}^2\alpha + 1\right) =$

$= \operatorname{cotg}^2\alpha\left(\operatorname{cotg}^2\alpha + 2\right) = \operatorname{cotg}^4\alpha + 2\operatorname{cotg}^2\alpha$.

Hemos llegado a obtener el lado B de la expresión dada, luego se ha demostrado que la igualdad es cierta.

12. $\operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

Solución:

Partiendo del miembro de la izquierda, que llamaremos A, mediante manipulaciones adecuadas llegaremos al miembro de la derecha:

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos^2\alpha =$

$= 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \dfrac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2 \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$

$= \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$. Queda así demostrado.

13. $\dfrac{2 \cdot \operatorname{sen} x + 3}{2 \cdot \operatorname{tg} x + 3 \cdot \sec x} = \cos x$

Solución:

Partiendo del miembro de la izquierda, que llamaremos A, mediante

B.3. Ecuaciones trigonométricas

14. Resuelve: $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:

$$x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^o = \dfrac{\pi}{3} \\ x_2 = 180^o - 60^o = 120^o = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

15. Resuelve: $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Solución:

$$x = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^o = 45^o \cdot \dfrac{\pi}{180^o} = \dfrac{\pi}{4} \\ x_2 = 360^o - 45^o = 315^o = 315^o \cdot \dfrac{\pi}{180^o} = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$$

16. $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Solución:

$$x = \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^o = 30^o \cdot \dfrac{\pi}{180^o} = \dfrac{\pi}{6} \\ x = 30^o + 180^o = 210^o = \dfrac{\pi}{7} \end{cases}$$

17. Resuelve la ecuación $\cos 2x = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

- Hay que recordar que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$. Así:

  $\cos 2x = \operatorname{sen} x \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$

- Por otro lado, hay que tener en cuenta que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Por ello:

  $$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} =$$

  $$= \begin{cases} \operatorname{sen} x = -1 \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Finalmente estudiamos cada uno de estos dos casos:

Si $\text{sen } x = -1$, entonces: $x_1 = \dfrac{3\pi}{2}$

Si $\text{sen } x = \dfrac{1}{2}$, entonces: $x_2 = \dfrac{\pi}{6}$ y $x_3 = \dfrac{5\pi}{6}$

18. Resuelve la ecuación $\text{sen } 2x \cdot \cos x = 6\text{sen}^3 x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

- Hay que recordar que $\text{sen } 2x = 2\text{sen } x \cdot \cos x$. Así:
  $\text{sen } 2x \cdot \cos x = 6\text{sen}^3 x \Rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6\text{sen}^3 x \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos^2 x = 6\text{sen}^3 x$

- Por otro lado, hay que tener en cuenta que $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$. Por ello:

  $2 \cdot \text{sen } x \cdot \left(1 - \text{sen}^2 x\right) = 6 \cdot \text{sen}^3 x \Rightarrow$

  $\Rightarrow \text{sen } x \cdot \left(1 - \text{sen}^2 x\right) = 3 \cdot \text{sen } x \cdot \text{sen}^2 x \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \text{sen } x \cdot \left(4 \cdot \text{sen}^2 x - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Finalmente estudiamos cada uno de estos tres casos:

  Si $\text{sen } x = 0$, entonces: $x_1 = 0$

  Si $\text{sen } x = \dfrac{1}{2}$, entonces: $x_2 = \dfrac{\pi}{6}$ y $x_3 = \dfrac{5\pi}{6}$

  Si $\text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$, entonces: $x_4 = \dfrac{7\pi}{6}$ y $x_5 = \dfrac{11\pi}{6}$

19. Resuelve: $\cos 2x - \cos 6x = \text{sen} 5x + \text{sen} 3x$

Solución:

- Vamos a utilizar las siguientes relaciones:

  $$\cos A - \cos B = -2 \cdot \text{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \text{sen} \frac{A-B}{2}$$

  $$\text{sen} A - \text{sen} B = 2 \cdot \text{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

- Entonces:

$$\cos 2x - \cos 6x = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{2x+6x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{2x-6x}{2}$$
$$\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{5x+3x}{2} \cdot \cos \frac{5x-3x}{2}$$

- Sustituimos lo obtenido en la ecuación dada y pasamos todo a un miembro

$$-2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot \operatorname{sen}(-2x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot \cos(x)$$

- Si tenemos en cuenta que $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$ y sacamos factor común, entonces:

$$2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot [\operatorname{sen}(2x) - \cos(x)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) = 0 \\ \operatorname{sen}(2x) - \cos(x) = 0 \end{cases}$$

- Resolvemos la primera ecuación de las dos:

$$2 \cdot \operatorname{sen}(4x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2} \\ 4x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Resolvemos la segunda ecuación:

$$\operatorname{sen}(2x) - \cos(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}(x)\cos(x) - \cos(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 1]\cos(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\ 2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

La solución es entonces la unión de todas estas soluciones.

20. Resuelve el siguiente sistema en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\ x + \operatorname{sen}\ y = 1 \\ 2x + 2y = \pi \end{array}\right\}$$

<u>Solución:</u>

- Despejamos x en la segunda ecuación y llevaremos su valor a la primera ecuación:

$$2x+2y=\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-y \text{, por lo que:}$$

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=1 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\operatorname{sen} y=1$$

- Ahora, para poder simplificar esta expresión usamos la fórmula del seno de la diferencia de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\cos y-\cos\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen} y=\cos y \text{, es decir:}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\operatorname{sen} y=1 \Rightarrow \cos y+\operatorname{sen} y=1$$

- Intentamos expresar el coseno en función del seno, elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación:

$$(\cos y+\operatorname{sen} y)^2=1^2 \Rightarrow \cos^2 y+\operatorname{sen}^2 y+2\cdot\operatorname{sen} y\cos y=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+2\cdot\operatorname{sen} y\cos y=1 \Rightarrow \operatorname{sen} y\cos y=0$$

Pero $\operatorname{sen} y\cos y=\operatorname{sen} 2y$, por lo que $\operatorname{sen} y\cos y=0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2y=0$

- Las soluciones para $\operatorname{sen} 2y=0$ están dadas por: $2y=0$ y $2y=\pi$, esto es: $y_1=0$; $y_2=\frac{\pi}{2}$. Teniendo en cuenta que $x=\frac{\pi}{2}-y$, entonces:

$$y_1=0 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}$$

$$y_2=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2=0$$

21. Calcula las soluciones del siguiente sistema, en el intervalo $[0,2\pi]$.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x=2\cdot\operatorname{sen} y\\ x-y=\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right\}$$

<u>Solución:</u>

- Despejamos x en la segunda ecuación y llevaremos su valor a la primera ecuación:

$$x-y=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+y\text{, por lo que:}$$

$$\text{sen } x=2\cdot\text{sen } y\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+y\right)=2\cdot\text{sen } y$$

- Usamos la fórmula del seno de la suma de dos ángulos en el miembro izquierdo de la ecuación:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+y\right)=\text{sen}\frac{\pi}{3}\cdot\cos y+\cos\frac{\pi}{3}\cdot\text{sen}y=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y+\frac{1}{2}\text{sen}y$$

Entonces la fórmula a resolver es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y+\frac{1}{2}\text{sen}y=2\text{sen}y\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y=\frac{1}{2}\text{sen}y\Rightarrow\sqrt{3}=\text{tg } y$$

Solución: $\text{tg } y=\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases} y_1=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}\\ y_2=180^\circ+60^\circ=\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$

22. Calcula las soluciones del siguiente sistema.

$$\left.\begin{array}{l}4y\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x=3\\ 2y\cdot\cos\ 2x=\sqrt{3}\end{array}\right\}$$

Solución:

- Dividimos las dos ecuaciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l}4y\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x=3\\ 2y\cdot\cos\ 2x=\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{4y\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x}{2y\cdot\cos\ 2x}=\frac{3}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{2\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x}{\cos\ 2x}=\sqrt{3}$$

- Recordamos que $2\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x=\text{sen } 2x$ y sustituimos en la ecuación:

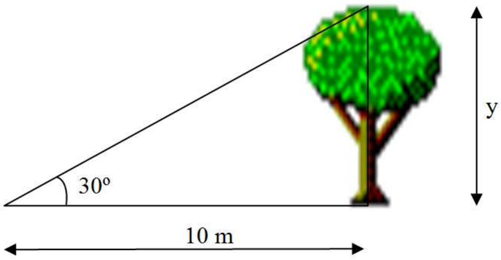
$$\frac{2\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x}{\cos\ 2x}=\frac{3}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\text{sen } 2x}{\cos\ 2x}=\sqrt{3}\Rightarrow\text{tg } 2x=\sqrt{3}$$

- Despejamos x:

$$2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

B.4. Problemas

23. Calcula la altura de un árbol que a una distancia de 10 m se ve bajo un ángulo de 30º.

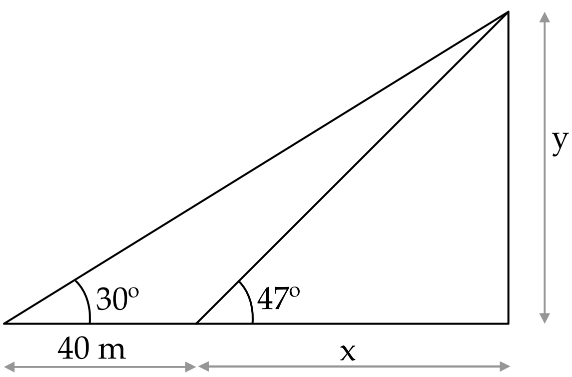


Solución:

La altura, **y**, del árbol la deducimos de la relación siguiente:

$$tg30=\frac{y}{10}\Rightarrow y=10\cdot tg30\Rightarrow y=5{,}77\ m$$

24. Calcula x e y:



Solución:

Aplicamos la relación $tg\theta=\frac{b}{a}$ a los dos triángulos rectángulos, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} tg47=\dfrac{y}{x} \\ tg30=\dfrac{y}{40+x} \end{cases}$$ Operando:

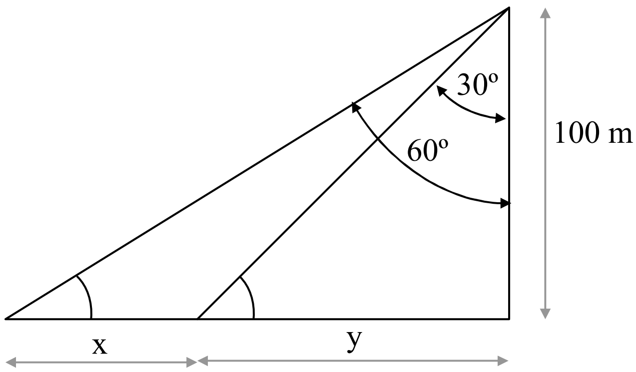
$$\begin{cases} x\cdot tg47=y \\ (40+x)tg30=y \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x\cdot tg47=y \\ (40+x)tg30=y \end{cases}\Rightarrow x\cdot tg47=(40+x)\cdot tg30\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,07x = 23,09 + 0,58x \Rightarrow 0,49x = 23,09 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{23,09}{0,49} \Rightarrow x = 47,12 \text{ m}.$$

Calculemos finalmente el valor de y:

$$x \cdot tg47 = y \Rightarrow 47,12 \cdot 1,07 = y \Rightarrow y = 50,42 \text{ m}$$

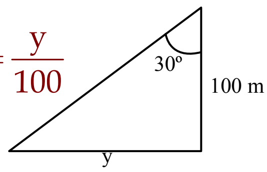
25. Calcula x



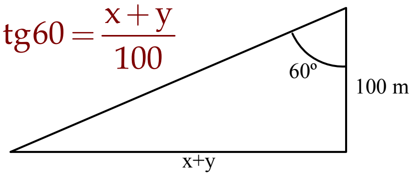
Solución:

Tenemos dos triángulos. De cada uno de ellos obtendremos una ecuación trigonométrica.

$$tg30 = \frac{y}{100}$$



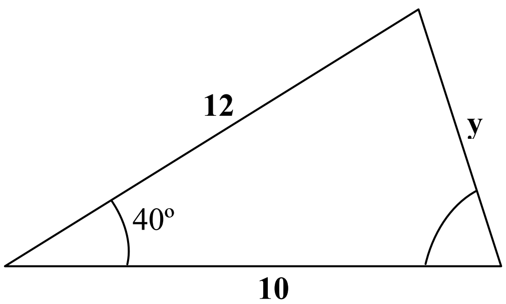
$$tg60 = \frac{x+y}{100}$$



Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 57,7 &= y \\ 173,2 - x &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow 57,7 = 173,2 - x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 115,5 \text{ m}$$

26. Calcula el valor de y (las longitudes están expresadas en m)



Solución:

Aplicamos el teorema del coseno:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

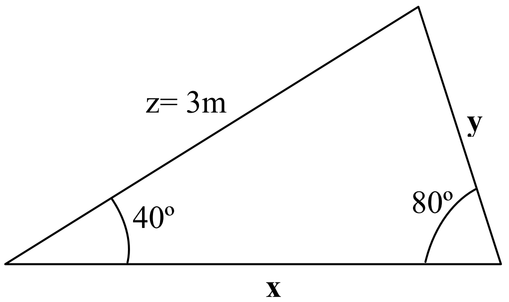
Entonces:

$$y^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 40 \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{100 + 144 - 240 \cdot \cos 40} = 7{,}76 \text{ m}$$

27. Calcula el valor de los lados x e y, aplicando el Teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$



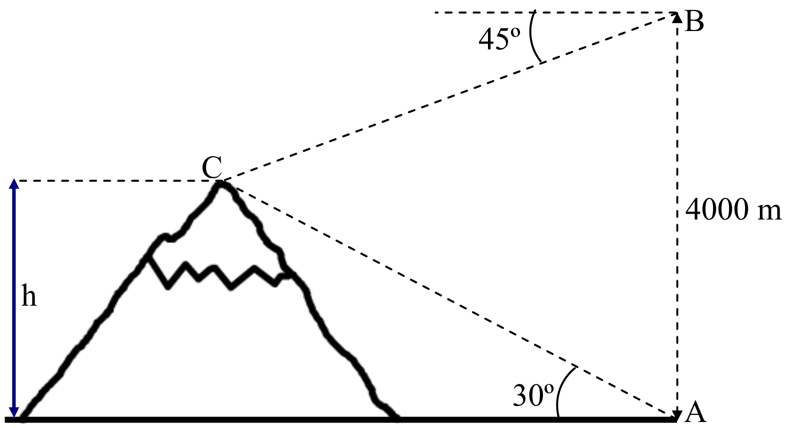
Solución:

Sustituimos los valores dados en la expresión del teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \Rightarrow$$

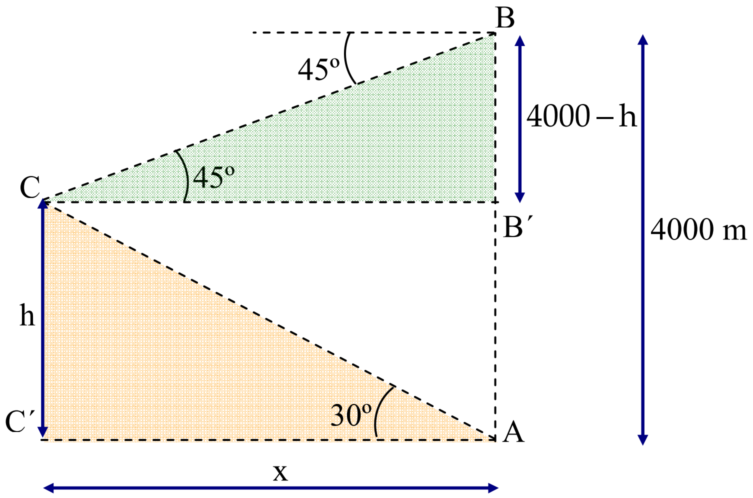
$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3 \cdot \text{sen}40}{\text{sen}80} = 1{,}96 \text{ m} \\ x = \dfrac{3 \cdot \text{sen}60}{\text{sen}80} = 2{,}64 \text{ m} \end{cases}$$

28. Halla la altura de la montaña



Solución:

Rehacemos el dibujo y de él extraeremos dos ecuaciones, cada una de ellas perteneciente a un triángulo rectángulo (el $\widehat{CBB'}$ y el $\widehat{ACC'}$



Triángulo $\widehat{CBB'}$:

$$tg45 = \frac{4000-h}{x}$$

Triángulo $\widehat{ACC'}$:

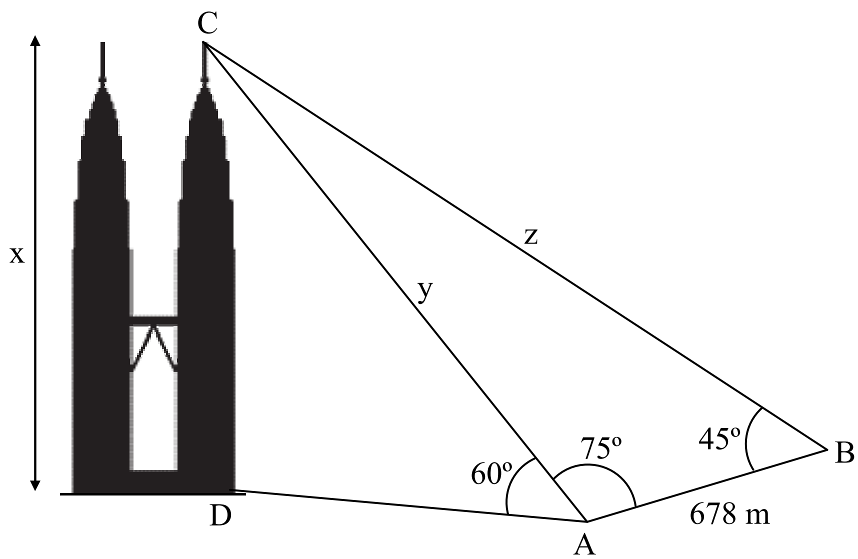
$$tg30 = \frac{h}{x}$$

Resolvamos éste sistema:

$$\left.\begin{array}{l} tg45 = \dfrac{4000-h}{x} \\ tg30 = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = \dfrac{4000-h}{x} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4000-h \\ x = h\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 4000 - h = h\sqrt{3} \Rightarrow$$

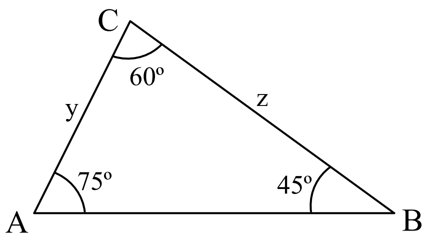
$$\Rightarrow h = \frac{4000}{\sqrt{3}+1}\,m \approx 1464\ m$$

29. Halla la altura de las Torres Petronas, **x** y también las distancias **y**, **z**.



Solución:

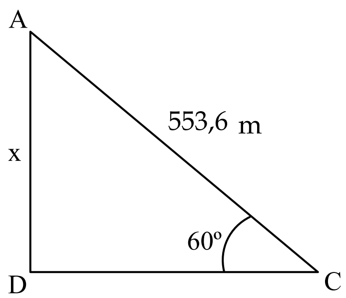
Primeramente vamos a centrarnos en el triángulo $\widehat{ABC}$:



$$\frac{y}{sen45}=\frac{z}{sen75}=\frac{678}{sen60}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{sen45}=\dfrac{678}{sen60}\\ \dfrac{z}{sen75}=\dfrac{678}{sen60}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{678}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ \dfrac{z}{sen75}=\dfrac{678}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=553{,}6\ \ m}\\ \boxed{z=756{,}21\ m}\end{cases}$$

Ahora nos fijamos en el triángulo $\widehat{ACD}$:



$$x=\ 553{,}6\cdot sen60\ \ =\ \boxed{479.43\ m}$$