Considérense las siguientes matrices y los parámetros desconocidos u y v:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de los parámetros α, β, u y v para que se cumpla la siguiente igualdad matricial, siendo B^T la matriz traspuesta de B:

$$A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} B^T + C \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = D$$

b) Siendo A^{-1} la matriz inversa de A, encontrar los valores de las constantes a y b que verifiquen:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot B^t + C \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = D$$ Sustituimos y operamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & -\beta \\ -3\alpha & 3\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha \\ 4\beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\beta & -2\alpha-2\beta \\ 6\beta & 3\alpha+6\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\alpha \\ 4\beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\beta & -4\alpha-2\beta \\ 10\beta & 2\alpha+6\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

De ahí aparecen cuatro condiciones (ecuaciones):

$$\left.\begin{array}{l} -2\beta = 2 \\ -4\alpha - 2\beta = u \\ 10\beta = v \\ 2\alpha + 6\beta = -2 \end{array}\right\}$$

$-2\beta = 2 \longrightarrow \boxed{\beta = -1}$

$10\beta = v;\ 10(-1) = v;\ \boxed{v = -10}$

$2\alpha + 6\beta = -2;\ 2\alpha + 6(-1) = -2;\ 2\alpha = -2+6;\ \boxed{\alpha = 2}$

$-4\alpha - 2\beta = u;\ -4\cdot 2 - 2(-1) = u;\ -8+2 = u;\ \boxed{u = -6}$

b) $$A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos previamente A^{-1}

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix};\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6-3 = 3$

$A_{11} = 3 \qquad A_{12} = -(-3) = 3$

$A_{21} = -(-1) = 1 \qquad A_{22} = 2$

$Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\quad \left[Adj(A)\right]^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix}$

Sustituimos ahora en la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+\frac{1}{3}b \\ a+\frac{2}{3}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ -a+2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+\frac{1}{3}b \\ a+\frac{2}{3}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b+1 \\ -a+2b+2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+\frac{1}{3}b=2b+1 \\ a+\frac{2}{3}b=-a+2b+2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2\left(a-\frac{5}{3}b=1\right) \\ 2a-\frac{4}{3}b=2 \end{array}\right\} + \begin{array}{l} -\cancel{2a}+\frac{10}{3}b=-2 \\ \cancel{2a}-\frac{4}{3}b=2 \\ \hline \end{array}$$

$$2b=0;\ \boxed{b=0}$$

$$a-\frac{5}{3}\cancel{0}=1;\ \boxed{a=1}$$

Este apartado "b" se puede hacer más rápido así:

$$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

MULTIPLICO AMBOS MIEMBROS POR LA MATRIZ A: (por la izquierda)

$$\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=A\cdot B\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$\vdots$

(Nos "ahorramos" así calcular A^{-1}).