a) Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde x, y, z son números reales.

Determine x, y, z para que el vector $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $M \cdot A = B$. (1,5 puntos)

Se refiere a matrices columna

b) Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a \neq 0,\ a+b=0,\ c=a$.

Determine si el sistema $N \cdot X = B$ es compatible determinado. (1,5 puntos)

matriz producto de dimensión 3x1 ← 1 columna

3 filas

$$\underset{3\times 3}{} \qquad \underset{3\times 1}{}$$

a) $M \cdot A = B$; $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

¡¡ojo!! MATRIZ 3X1

$$\begin{pmatrix} x+2y+3z \\ y+2z+3x \\ z+2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \left.\begin{aligned} x+2y+3z&=1 \\ 3x+y+2z&=0 \\ 2x+3y+z&=1 \end{aligned}\right\}$$

sistema de 3 ec. con 3 incógnitas que resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-5F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

SISTEMA TRIANGULADO

A LA VISTA DE ESE -1, PREFIERO TRIANGULARLO ASÍ

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=1 \\ 18z&=2 \\ y+5z&=1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow z=\frac{2}{18}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

$$y+5\left(\frac{1}{9}\right)=1 ; \quad y=1-\frac{5}{9}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

$$x+2\left(\frac{4}{9}\right)+3\left(\frac{1}{9}\right)=1 ; \quad x=1-\frac{11}{9}=\boxed{-2/9}$$

b) $N=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Además $a \neq 0$

$a+b=0 \rightarrow b=-a$

$c = a$

$$N \cdot X = B \; ; \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a & -a & a \\ -a & a & a \\ a & a & -a \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz de coeficientes A de un sistema 3×3

Para que sea compatible determinado, debe ocurrir que $r(A) = 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -a & a & a \\ a & a & -a \end{vmatrix} = -a^3 - a^3 - a^3 - a^3 - \cancel{a^3} + \cancel{a^3} = -4a^3$$

Como el enunciado dice que $a \neq 0$, entonces $-4a^3 \neq 0$ y, por tanto, el sistema es compatible determinado.