03750

1 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

a) Obtenga a y b sabiendo que $A^2=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica? (1,25 puntos)

b) Para los valores $a=3$ y $b=1$, calcule la matriz X tal que $A\cdot B=2(X-3I)$. (1,25 puntos)

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\cdot 2+(-1)a & 2(-1)+(-1)\cdot b\\ a\cdot 2+b\cdot a & a(-1)+b\cdot b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$4-a=5 \longrightarrow a=4-5;\ \boxed{a=-1}$

$-2-b=-2 \longrightarrow -2+2=b;\ \boxed{b=0}$

$2a+ab=-2$

$-a+b^2=1$

COMPROBAMOS 3ª y 4ª ECUACIÓN PARA $a=-1$ y $b=0$
SE PUEDE HACER "DE CABEZA"

Las ecuaciones 3ª y 4ª también son ciertas para $a=-1$ y $b=0$, luego:

$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. La matriz es simétrica porque coincide con su traspuesta:

$A^t=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ Como $A=A^t$, A es simétrica.

b) Para $a=3$, $b=1$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$A\cdot B=2(X-3I)$; $2X-6I=A\cdot B$; $2X=A\cdot B+6I$; $X=\frac{1}{2}(AB+6I)$

$$\boxed{X=\frac{1}{2}AB+3I}$$

Calculamos previamente el producto $A\cdot B$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2(-1)+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 0\\ 3(-1)+1\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

"SE PUEDE SALTAR"

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/2 & 1\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1/2 & 1\\ 0 & 9/2\end{pmatrix}}$$