

Discutir el siguiente sistema en función de los valores del parámetro  $a$ .

$$\begin{cases} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{cases}$$

Resolverlo siempre que sea compatible.

$$\begin{cases} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{cases} \quad A^* = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\quad\quad}_A$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 - a(a+1) = 2 - a^2 - a$$

$$-a^2 - a + 2 = 0; \quad a^2 + a - 2 = 0; \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

Iniciamos la discusión de acuerdo al Teorema de Rouché:

1º caso: si  $a \neq 1$  y  $a \neq -2$  entonces  $r(A) = r(A^*) = 2$  (nº de incógnitas) S.C.D.

2º caso: si  $a = 1$  entonces  $A^* = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \quad r(A) = 1$

$$|C_1, C_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 \neq 0 \quad \text{luego } r(A^*) = 2 \quad \text{porque } \exists M_2 \neq 0$$

Como  $\underbrace{r(A)}_1 \neq \underbrace{r(A^*)}_2$  SISTEMA INCOMPATIBLE.

3º caso: si  $a = -2$  entonces:

$$A^* = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{array} \right) \quad r(A) = 1$$

$$r(A^*) = 1 \text{ ya que } \nexists M_2 \neq 0$$

$$\text{como } r(A) = r(A^*) = 1 < 2 (\text{n}^\circ \text{ de incógnitas}) \text{ S.C.I.}$$

Lo resolvemos en los casos en que es compatible:

$$\underline{1^\circ \text{ caso:}} \text{ si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -2 \text{ el sistema es } \left. \begin{array}{l} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{array} \right\}$$

Lo resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 + 2(a+1)}{2 - a^2 - a} = \frac{2a+4}{-a^2-a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -2 \end{vmatrix}}{-a^2-a+2} = \frac{-2+a}{-a^2-a+2}$$

2º caso: si  $a = -2$  el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow x - y = 1; \quad \boxed{y = \lambda} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{x = 1 + \lambda}$$