Estudiar para qué valores de k es compatible el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$$

Resolverlo para los valores de k que lo hacen compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \\ x + ky = 2 \end{array}\right\} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right)$$

A

¡¡ojo!! la matriz orlada en este sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas es LA AMPLIADA

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{vmatrix} = \cancel{2} + \cancel{2} - \cancel{4}k - \cancel{2} + \cancel{4}k - \cancel{2} = 0$$

luego $r(A^*) < 3$ ya que $\nexists M_3 \neq 0$ en A^*

Buscamos entonces en $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1/2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ un menor de orden 2 distinto de cero:

Probamos con $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$ seguimos buscando...

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 2k + 1 \quad ; \quad 2k + 1 = 0; \quad k = -\frac{1}{2}$$

Iniciamos la discusión de acuerdo al Teorema de Rouché:

<u>1^er caso:</u> si $k \neq -\frac{1}{2}$ entonces $r(A) = 2$

$r(A^*) = 2$ ¡¡recuerda que al principio ya vimos que $r(A) < 3$!!

luego $r(A) = r(A^*) = 2$ (nº de incógnitas) S.C.D. (solución única)

<u>2º caso:</u> si $k = -\frac{1}{2}$ entonces:

$$A^* = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \end{array}$$

$r(A) = 1$ ya que C_1 y C_2 son proporcionales

$r(A^*) = 1$ ya que $\underbrace{C_3 = 2C_1}$

otra manera de decir que son proporcionales

como $r(A) = r(A^*) = 1 < 2$ (nº de incógnitas)

S.C.I. (infinitas soluciones).

Lo resolvemos cuando es compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ -x+\frac{1}{2}y=-2 \\ x-\frac{1}{2}y=2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{nos quedamos sólo con una}]{\text{las tres ecuaciones son la misma,}} 2x-y=4$$

$\boxed{y=\lambda}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

$2x-\lambda=4$; $\boxed{x=\frac{4+\lambda}{2}}$

LO DISCUTIMOS AHORA UTILIZANDO EL MÉTODO DE GAUSS:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ -x+\frac{1}{2}y=-2 \\ x+ky=2 \end{array}\right\}$$

$0x+0y=0$
"sobra"

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_3]{2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \\ -2 & -2k & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2k-1 & 0 \end{array}\right)$$

$-2k-1=0$; $k=-\frac{1}{2}$

1^er^ caso: si $k\neq-\frac{1}{2}$ entonces la 3ª ecuación es $(-2k-1)y=0$ tiene solución $y=0$, a partir de ahí calculamos la x y el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO

2º caso: si $k=-\frac{1}{2}$ entonces la 3ª ecuación queda $0y=0$ y el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.