

Estudiar para los diferentes valores del parámetro a , la existencia de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

$$\left. \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases} \right\} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right)$$

A

Calculamos: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a + 2a - 1 - a^2 - 2 = -a^2 + 3a - 2$

$$-a^2 + 3a - 2 = 0; \quad a^2 - 3a + 2 = 0; \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Iniciamos la discusión de acuerdo al Teorema de Rouché:

1º caso: si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ entonces $r(A) = r(A^*) = 3$ (nº de incógnitas) S.C.D. (tiene solución única)

2º caso: si $a = 1$ entonces $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$ $r(A) = 2$ ya que C_1 y C_2 no son proporcionales

$C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 = 0 \quad \text{luego } r(A^*) = 3 \text{ ya que } \exists M_3 \neq 0$$

como $\underbrace{r(A)}_2 \neq \underbrace{r(A^*)}_3$ entonces el sistema es INCOMPATIBLE.

3º caso: si $a = 2$ entonces $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$ $r(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \neq 0$

$C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{luego } r(A^*) = 2 \text{ ya que } \nexists M_3 \neq 0$$

Como $r(A) = r(A^*) = 2 < 3$ (nº de incógnitas) S.C.I. (tiene infinitas soluciones).

Lo resolvemos para el caso en que sea compatible indeterminado: $a=2$

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+2y+z=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Tomamos dos} \\ \text{ecuaciones} \\ \text{por ser} \\ \text{S.C.I.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+z=1 \end{array} \right\} \xrightarrow{E_2-E_1} \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=0 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y=0}$$

$$\text{Tomamos } \boxed{z=\lambda}; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x+y+z=1; \quad x+0+\lambda=1; \quad \boxed{x=1-\lambda}$$