

Estudiar el siguiente sistema para los distintos valores de λ y resolverlo para el valor $\lambda = 1$

$$\begin{cases} x + y - z = \lambda \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

Escribimos las matrices asociadas al sistema: la de coeficientes (A) y la matriz ampliada (A^*):

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 \end{array} \right)$$

A

Calculamos $|A|$: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda + 4 - 1 - 2 - 2 - \lambda = -2\lambda - 1$;

Hacemos $-2\lambda - 1 = 0$; $-2\lambda = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

Iniciamos la discusión de acuerdo al Teorema de Rouché:

1º caso: si $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ entonces $r(A) = r(A^*) = 3$ (nº de incógnitas) SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (tiene solución única)

2º caso: si $\lambda = -\frac{1}{2}$ entonces: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 & 0 \end{array} \right)$
 $C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4$

$r(A) = 2$ ya que C_1 y C_2 no son proporcionales.

Calculamos $r(A^*)$:

$$\det(C_1, C_2, C_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{2} - 1 - 1 = -\frac{1}{2} \neq 0 \text{ luego } r(A^*) = 3 \text{ ya que } \exists M_3 \neq 0$$

como $\underbrace{r(A)}_2 \neq \underbrace{r(A^*)}_3$ el sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución).

lo resolvemos ahora para $\lambda = 1$:

$$\left. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

lo resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 1 - 2 - 2 - 1 = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-1-1-2-1}{-3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+4+2-1}{-3} = \frac{6}{-3} = \boxed{-2}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2+1+2-1}{-3} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$