Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + \quad y + \quad z = \lambda + 1 \\ \quad 3y + 2z = 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)y + \quad z = \lambda \end{cases}$$

a) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$. (1 punto)

b) Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución. (1 punto)

c) ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$? (0,5 puntos)

a) Si $\lambda = 1$, el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 3y+2z=5 \\ 3x \quad +z=1 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos utilizado el método de Gauss. El sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 3y+2z=5 \end{array}\right\} \text{ Tomamos } \boxed{z=\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad 3y+2\lambda=5;\ 3y=5-2\lambda;\ \boxed{y=\frac{5-2\lambda}{3}}$$

$$x+\frac{5-2\lambda}{3}+\lambda=2;\quad \frac{3x}{\cancel{3}}+\frac{5-2\lambda}{\cancel{3}}+\frac{3\lambda}{\cancel{3}}=\frac{6}{\cancel{3}};\quad 3x+5-2\lambda+3\lambda=6;\ 3x=1-\lambda;\ \boxed{x=\frac{1-\lambda}{3}}$$

b) Si el sistema tiene solución única, de acuerdo al Teorema de Rouché, tendrá que ocurrir que $r(A)=r(A^*)=3$ (nº de incógnitas)

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 3 & \lambda-1 & 1 & \lambda \end{array}\right);\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = 3+6-9-2(\lambda-1) = -2\lambda+2;$$

$$-2\lambda+2=0;\ -2\lambda=-2;\ \lambda=1$$

Así pues, si $\lambda \neq 1$ $r(A)=r(A^*)=3$ (nº de incógnitas), el sistema es compatible determinado: Tiene solución única.

c) Si $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ es solución, cumplirá las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=\lambda+1 \\ 3y+2z=2\lambda+3 \\ 3x+(\lambda-1)y+z=\lambda \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \cancel{-\frac{1}{2}}+0+\cancel{\frac{1}{2}}=\lambda+1;\quad \lambda=-1 \\ \cancel{3\cdot 0}+2\left(\frac{1}{2}\right)=2\lambda+3;\quad 1=2\lambda+3;\quad \lambda=\frac{-2}{2}=-1 \\ 3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\lambda;\quad -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\lambda;\quad \lambda=-1 \end{array}$$

de ahí que $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ sí es solución del sistema, cuando $\lambda=-1$