

Problemas aritméticos

INTRODUCCIÓN

En la vida real, la mayor parte de las relaciones entre magnitudes son relaciones de proporcionalidad directa o inversa. Es importante que los alumnos aprendan a distinguir entre ambos tipos y a resolver las reglas de tres directas o inversas que se establecen entre las magnitudes implicadas. Para ello es fundamental determinar la relación que existe entre las variables antes de operar con ellas y evitar que los alumnos apliquen los métodos de manera mecánica, ayudándolos a razonar los pasos que hay que seguir en cada caso.

Los repartos proporcionales son una aplicación de las relaciones de proporcionalidad, que conviene que el alumno conozca y maneje con destreza. Es fundamental el manejo de porcentajes, ya que los alumnos tendrán que utilizarlos con mucha frecuencia, tanto en el ámbito académico como en la vida real.

La parte final de la unidad se dedica al cálculo del interés, simple y compuesto.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Dos magnitudes son *directamente proporcionales* cuando la razón entre dos cantidades correspondientes es constante: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$. Entre magnitudes directamente proporcionales podemos aplicar *repartos directamente proporcionales*.
- Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto de dos valores correspondientes x e y es constante. Entre magnitudes inversamente proporcionales podemos aplicar *repartos inversamente proporcionales*.
- Las reglas de tres compuestas pueden ser *directas* o *inversas*.
- Los *porcentajes* o *tantos por ciento* expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales, e indican la cantidad de una de ellas correspondiente a *100 unidades* de la otra.
- Hay dos tipos de interés: el *simple* y el *compuesto*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer magnitudes directamente proporcionales.	• Magnitudes directamente proporcionales. • Constante de proporcionalidad.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple directa. • Aplicación de método de reducción a la unidad.
2. Reconocer magnitudes inversamente proporcionales.	• Magnitudes inversamente proporcionales. • Constante de proporcionalidad.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple inversa. • Aplicación de método de reducción a la unidad.
3. Realizar repartos proporcionales.	• Repartos directa e inversamente proporcionales.	• Resolución de problemas de repartos.
4. Aplicar la regla de tres compuesta.	• Regla de tres compuesta directa. • Regla de tres compuesta inversa.	• Resolución de problemas con reglas de tres compuestas.
5. Resolver problemas con porcentajes.	• Porcentajes. • Aumentos y disminuciones porcentuales. • Porcentajes encadenados.	• Expresión de cantidades en tantos por ciento. • Utilización de los porcentajes para resolver problemas. • Resolución de problemas que implican aumentos o disminuciones porcentuales.
6. Calcular el interés simple o el interés compuesto de una cantidad.	• Interés simple. • Interés compuesto.	• Cálculo de cantidades mediante el interés simple. • Cálculo de cantidades mediante el interés compuesto.

- $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$$

- ### EJEMPLO

es: $k = \frac{7,5}{1,25} = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } 1,25 \text{ kg} \xrightarrow{\text{cuestan}} 7,5 \text{ €} \\ 2,25 \text{ kg} \xrightarrow{\text{costarán}} x \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{7,5}{1,25} = \frac{x}{2,25} \rightarrow x = \frac{7,5 \cdot 2,25}{1,25} = 13,50 \text{ €}$$
$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } 1,25 \text{ kg} \xrightarrow{\text{cuestan}} 7,5 \text{ €} \\ 1 \text{ kg} \xrightarrow{\text{costarán}} x \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{7,5}{1,25} = \frac{x}{1} \rightarrow x = \frac{7,5 \cdot 1}{1,25} = 6 \text{ €}$$

1 He invitado a María al cine y por las dos entradas me han cobrado 15 €. ¿Cuánto hubiera tenido que pagar si hubiera invitado a otros 5 amigos más?

- 2** En media hora he recorrido una distancia de 2,5 km. ¿Cuánta distancia recorreré a la misma velocidad, en tres cuartos de hora?

RECONOCER MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de dos valores correspondientes x e y es constante:

$$x \cdot y = k \rightarrow y = \frac{k}{x}$$

- A esta constante k se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.
- El **método de reducción a la unidad** consiste en hallar la cantidad de la magnitud desconocida que corresponde a una unidad de la otra magnitud.

EJEMPLO

Seis albañiles tardan 4 horas en levantar un muro de ladrillos. ¿Cuánto tiempo tardarían en levantar el muro 9 albañiles trabajando al mismo ritmo?

Las magnitudes *número de albañiles* y *número de horas* son inversamente proporcionales, ya que cuanto mayor sea el número de albañiles, menor será el número de horas empleado para levantar el muro.

Por ser magnitudes inversamente proporcionales, cumplen que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si 6 albañiles} \xrightarrow{\text{tardan}} 4 \text{ horas} \\ \text{9 albañiles} \xrightarrow{\text{tardarán}} x \text{ horas} \end{array} \right\} \rightarrow 6 \cdot 4 = 9 \cdot x \rightarrow x = \frac{24}{9} = 2,66 \text{ horas}$$

El mismo problema se puede resolver por el método de reducción a la unidad, es decir, averiguando cuánto tardaría en levantar el muro un albañil:

$$24 = 1 \cdot x \rightarrow x = 24 \text{ horas}$$

Si un albañil tarda 24 horas en levantar el muro, 9 albañiles tardarían 9 veces menos, es decir:

$$\frac{24}{9} = 2,66 \text{ horas}$$

- 1 **Circulando a 90 km/h hemos tardado 3 horas en recorrer una distancia. ¿Cuánto tardaríamos en llegar si fuéramos a 120 km/h?**

- 2 **Una piscina tiene 6 grifos que manan el mismo caudal, en litros de agua por minuto. Si solo abrimos 2 grifos, la piscina tarda 8 horas en llenarse. Calcula cuánto tiempo tardaría en llenarse si abrimos los seis grifos.**

REALIZAR REPARTOS PROPORCIONALES

Para realizar el reparto de una cantidad n de forma **directamente proporcional** a unas cantidades $a, b, c, \dots$, hacemos lo siguiente:

- a) **Se suman las cantidades** en las que hay que repartir: $a + b + c + \dots$
- b) **Se divide la cantidad n entre esa suma.** El cociente nos da la constante de proporcionalidad.
- c) Para calcular cada parte basta con multiplicar cada cantidad **$a, b, c, \dots$** , por esa constante.

EJEMPLO

Un padre ha ganado un premio de 18.000 € y quiere repartirlo entre sus tres hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 8, 10 y 12 años.

¿Qué cantidad le corresponderá a cada uno?

- a) Se suman los años por los que hay que repartir: $8 + 10 + 12 = 30$
- b) Dividimos la cantidad del dinero entre la suma anterior: $\frac{18.000}{30} = 600$
- c) Al hijo de 8 años le corresponderán: $600 \cdot 8 = 4.800$ €
Al hijo de 10 años le corresponderán: $600 \cdot 10 = 6.000$ €
Y al hijo de 12 años le corresponderán: $600 \cdot 12 = 7.200$ €

Para comprobar que el reparto está bien hecho, sumamos las tres partes:

$$4.800 + 6.000 + 7.200 = 18.000 \text{ €}$$

- 1 Para comprar una papeleta en una rifa que costaba 12 €, tres amigos han puesto 7, 4 y 1 €, respectivamente, y les ha tocado un premio de 60 €. ¿Qué parte del premio le corresponderá a cada uno?

- 2 Cuatro vecinos deciden poner césped en sus jardines, que miden 12, 15, 18 y 16 m², respectivamente y se lo encargan a un jardinero para que les salga más barato. Si el jardinero les cobra 732 € en total, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno?

Repartir una cantidad n de forma **inversamente proporcional** a otras cantidades $a, b, c, \dots$, es equivalente a repartirla de forma directamente proporcional a los inversos de las cantidades **$a, b, c, \dots$** .

En la práctica, para hacer un reparto inversamente proporcional, hay que plantear una ecuación de primer grado.

EJEMPLO

El padre del ejemplo anterior quiere repartir ahora el premio entre sus tres hijos de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 8, 10 y 12 años. ¿Qué cantidad le correspondería a cada uno?

	<u>1.º hijo</u>	<u>2.º hijo</u>	<u>3.º hijo</u>
Edades	8	10	12
Partes del premio	x	y	z
	$8x = 10y$		$8x = 12z$
	$y = \frac{8x}{10} = \frac{4x}{5}$		$z = \frac{8x}{12} = \frac{2x}{3}$

Como la suma de las tres partes en que se va a repartir el premio tiene que ser igual al premio, se cumplirá que:

$$x + y + z = x + \frac{4x}{5} + \frac{2x}{3} = 18.000$$

Y reduciendo a común denominador resulta:

$$\frac{15x}{15} + \frac{12x}{15} + \frac{10x}{15} = \frac{37x}{15} = 18.000 \rightarrow x = \frac{15 \cdot 18.000}{37} = 7.297,30 \text{ €}$$

Las partes de los otros dos hijos serán:

$$y = \frac{4x}{5} = \frac{4 \cdot 7.297,30}{5} = 5.837,84 \quad z = \frac{2x}{3} = \frac{2 \cdot 7.297,30}{3} = 4.864,86 \text{ €}$$

Por último, para comprobar que el reparto está bien realizado, sumamos las tres partes:

$$7.297,30 + 5.837,84 + 4.864,86 = 18.000 \text{ €}$$

3 Reparte 93 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 5. Comprueba el resultado.

APLICAR LA REGLA DE TRES COMPUESTA

Para **resolver un problema de proporcionalidad**:

- 1.º Se ordenan las magnitudes y los datos, y se averigua el tipo de proporcionalidad que hay entre cada magnitud y la magnitud que tiene la incógnita.
- 2.º Se hace la reducción a la unidad.

Si las magnitudes son directamente proporcionales, se trata de una **regla de tres compuesta directa**.

EJEMPLO

En un mes, tres amigos han ido juntos tres veces al cine, costándoles la entrada la misma cantidad los tres días. En total, se han gastado 40,50 € en ese mes en ir al cine. ¿Cuánto se gastarían en total cinco amigos que han ido cinco veces juntos al cine?

En primer lugar hay que averiguar qué tipo de proporcionalidad existe entre las magnitudes del problema: *número de amigos, número de veces y precio total*.

- Cuantos más amigos vayan, mayor será el gasto total; son magnitudes directamente proporcionales.
- Cuantas más veces vayan, mayor será el gasto total; son magnitudes directamente proporcionales.

Se trata de una **regla de tres compuesta directa**.

Reducimos a la unidad, y por ser magnitudes directamente proporcionales, se divide:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si 3 amigos} \longrightarrow \text{en 3 veces} \longrightarrow \text{gastan 40,50 € al mes} \\ \text{1 amigo} \longrightarrow \text{en 1 vez} \longrightarrow \text{gastará } \frac{40,5}{3 \cdot 3} = 4,30 \text{ € al mes} \end{array} \right\}$$

Y resolvemos el caso planteado multiplicando:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si 1 amigo} \longrightarrow \text{en 1 vez} \longrightarrow \text{gasta 4,50 € al mes} \\ \text{5 amigos} \longrightarrow \text{en 5 veces} \longrightarrow \text{gastarán } x \text{ € al mes} \end{array} \right\}$$
$$x = 4,5 \cdot 5 \cdot 5 = 112,50 \text{ €}$$

1 Cinco albañiles, trabajando durante 3 días, han levantado un muro de 12 metros de longitud. ¿Cuántos metros de muro levantarían 7 albañiles durante dos días?

2 Si seis pasteleros en 3 días hacen quince tartas, ¿cuántas tartas harán nueve pasteleros trabajando durante 2 días al mismo ritmo que los anteriores?

Si las magnitudes que se relacionan en el problema son inversamente proporcionales, se trata de una **regla de tres compuesta inversa**.

EJEMPLO

Para llenar una piscina, 3 grifos han estado manando agua 5 horas diarias durante 6 días. ¿Cuántos días tardaría en llenarse la piscina si hay 4 grifos abiertos durante 3 horas diarias?

En primer lugar hay que averiguar qué tipo de proporcionalidad existe entre las magnitudes del problema: *número de grifos, número de horas diarias y número de días*.

- Cuantos más grifos estén abiertos, menor será el número de días; son magnitudes inversamente proporcionales.
- Cuantas más horas al día estén abiertos los grifos, menor será el número de días; son magnitudes inversamente proporcionales.

Se trata de una **regla de tres compuesta inversa**.

Reducimos a la unidad, y por ser magnitudes inversamente proporcionales, se multiplica:

Si 3 grifos	→	5 horas al día	→	tardan 6 días
1 grifo	→	5 horas al día	→	tardará $6 \cdot 3$ días
1 grifo	→	1 hora al día	→	tardará $6 \cdot 3 \cdot 5$ días

Y resolvemos el caso planteado dividiendo:

Si 1 grifo	→	1 hora al día	→	tarda $6 \cdot 3 \cdot 5 = 90$ días
4 grifos	→	1 hora al día	→	tardarán $\frac{90}{4}$ días
4 grifos	→	3 horas al día	→	tardarán $\frac{90}{4 \cdot 3}$ días

$$\frac{90}{4 \cdot 3} = 7,5 \text{ días}$$

- 3 Tres tractores, trabajando durante 6 horas al día, han tardado un día en arar un campo de trigo. ¿Cuánto tardarían en arar dicho campo 5 tractores iguales a los anteriores, trabajando durante 8 horas al día?

- 1 En un periódico local leemos que para el próximo puente el 38 % de las plazas hoteleras de la región están ya reservadas. Sabiendo que el número total de plazas es de 850, calcula las plazas que están ya reservadas y las plazas que quedan aún libres.
- 2 En un colegio juegan a baloncesto 169 alumnos, que representan el 26 % del total de los alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el colegio? ¿Y cuántos no juegan a baloncesto?

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

Para calcular en qué se transforma una cantidad C cuando aumenta o disminuye en un $p\%$, se multiplica dicha cantidad por el índice de variación:

$C(1 + p/100)$, si aumenta.

$C(1 - p/100)$, si disminuye.

- 3 Para fomentar el uso del transporte público en una ciudad, se ha decidido rebajar un 7 % el precio del billete de autobús, que era de 0,80 €, y aumentar un 11 % el precio de 1 hora de aparcamiento, que era de 1,20 €. Calcula los nuevos precios del billete y del aparcamiento.
- 4 El año pasado en mi colegio había 72 alumnos que jugábamos al fútbol, pero este año somos 108 alumnos. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento?

Para calcular aumentos o disminuciones porcentuales sucesivos, se multiplican los índices de variación: $(1 + p)$ para los aumentos y $(1 - p)$ para las disminuciones.

EJEMPLO

A lo largo del año, la cifra de parados de una Comunidad ha ido variando según los siguientes aumentos y disminuciones porcentuales.

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
+2 %	+3 %	+4 %	-2 %	-1 %	-3 %	-5 %	0 %	0 %	+3 %	+3 %	+2 %

Si al comienzo del año había 380.000 parados en esa Comunidad, calcula los parados que hay al finalizar el año.

Hallamos en primer lugar los sucesivos índices de variación:

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
1,02	1,03	1,04	0,98	0,99	0,97	0,95	1	1	1,03	1,03	1,02

Multiplicamos los sucesivos índices de variación:

$$1,02 \cdot 1,03 \cdot 1,04 \cdot 0,98 \cdot 0,99 \cdot 0,97 \cdot 0,95 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,02 = 1,06$$

El número de parados al finalizar el año será: $380.000 \cdot 1,06 = 402.800$ personas

Ha aumentado un 6 %, como vemos por el índice de variación total.

- 5 La entrada de un cine cuesta 4,50 €, pero me aplican un descuento del 20 %. Como además es el día del espectador, me aplican un descuento adicional del 30 %. Calcula cuánto me cuesta la entrada ese día.

- 6 El precio de un modelo de coche ha experimentado las siguientes variaciones a lo largo de los últimos cinco años.

2004	2005	2006	2007	2008
+2,5 %	+3 %	0 %	-1,5 %	-2 %

Si su precio en 2004 era de 15.000 €, calcula cuál será su precio en 2008.

OBJETIVO 6

CALCULAR EL INTERÉS SIMPLE O EL INTERÉS COMPUESTO DE UNA CANTIDAD

Si depositamos un capital C en una entidad bancaria que funciona con un tanto por ciento de interés r y retiramos periódicamente el beneficio obtenido, estamos ante un caso de **interés simple**, y se calcula así:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}, \text{ si el tiempo } t \text{ viene dado en años.}$$

EJEMPLO

Luis ingresa 200 € en una cuenta bancaria al 4 % de interés anual simple, y quiere saber cuánto dinero tendrá al cabo de dos años.

Podemos calcular el interés que le rentan 200 € al año aplicando una regla de tres simple:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si por } 100 \text{ €} \rightarrow 4 \text{ € de interés en 1 año} \\ \text{por } 200 \text{ €} \rightarrow x_1 \text{ € de interés en el 1.º año} \end{array} \right\} \rightarrow x_1 = 8 \text{ €}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si por } 100 \text{ €} \rightarrow 4 \text{ € de interés en 1 año} \\ \text{por } 200 \text{ €} \rightarrow x_2 \text{ € de interés en el 2.º año} \end{array} \right\} \rightarrow x_2 = 8 \text{ €}$$

Al final del primer año tendrá: $200 + 8 = 208 \text{ €}$ en la cuenta.

Al final del segundo año tendrá: $200 + 16 = 216 \text{ €}$ en la cuenta.

Habrà ganado 16 € en los dos años.

Otra forma más sencilla de calcular los intereses generados al cabo de los dos años es aplicando la fórmula:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{200 \cdot 4 \cdot 2}{100} = 16 \text{ €}$$

Y, por tanto, el capital acumulado es: $200 + 16 = 216 \text{ €}$

- 1 **Calcula cuánto tiempo ha de permanecer un capital de 600 € a un interés simple del 4 % para que se duplique.**
- 2 **Calcula cuántos euros habría que ingresar y mantener durante 5 años en una cuenta, al 5 % de interés simple, para que los intereses obtenidos a lo largo de los 5 años sean 100 €.**

Si los intereses generados durante el primer año (mes o día, dependiendo de cómo sea el tanto por ciento de interés) se suman al capital inicial, dando un nuevo capital sobre el que actuará el tanto por ciento de interés, estamos ante un caso de **interés compuesto**.

Para calcular el capital final C_f que se obtiene a partir de un capital inicial C en t años al tanto por ciento anual r , aplicamos esta fórmula.

$$C_f = C \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$$

El interés generado al cabo de esos t años será el capital final menos el capital inicial: $i = C_f - C$

EJEMPLO

Luis quiere saber si le conviene ingresar los 200 € en una cuenta joven al 4 % de interés anual compuesto, para lo cual necesita calcular cuánto dinero se habrá generado al cabo de 2 años y qué capital tendrá entonces.

Al final del 1.^{er} año, el interés generado será de 8 € (igual que con el interés simple), pero sobre el capital al final del 1.^{er} año se aplicarán los intereses, y será: $C_1 = C + i_1 = 200 + 8 = 208$ €.

Al final del 2.^o año, el interés generado ese año es:

$$i_2 = 208 \cdot \frac{4}{100} = 8,32 \text{ €}$$

Y el capital acumulado es: $C_2 = C_1 + i_2 = 208 + 8,32 = 216,32$ €

Así, los intereses generados en los dos años son: $i_1 + i_2 = 8 + 8,32 = 16,32$ €

Si aplicamos directamente la fórmula para este tipo de interés, tenemos que:

$$C_f = C \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t = 200 \cdot \left(1 + \frac{4}{100} \right)^2 = 200 \cdot 1,04^2 = 216,32 \text{ €}$$

Y los intereses generados son: $i = C_f - C = 216,32 - 200 = 16,32$ €

Por tanto, vemos que los intereses generados y el capital final al cabo de los dos años son mayores en la cuenta a interés compuesto. Esta diferencia se hace mayor cuantos más años transcurren.

Normalmente, las cuentas en bancos y cajas de ahorro funcionan a interés compuesto.

3 Una persona abre una cuenta de ahorro al 2,5 % de interés compuesto e ingresa 15.000 €, manteniéndolos durante 15 años.

- a) ¿Cuál será el capital final y qué intereses le habrán sido abonados al cabo de los 15 años?
- b) ¿Y si mantiene ese dinero en la cuenta durante 20 años?

EJEMPLO

Una persona ha vendido 150 acciones que tenían un *valor nominal* de 4,50 € al *cambio* del 175 %. Si los *gastos de comisión* por la venta suponen el 3 % del *valor efectivo* de las acciones, ¿cuál ha sido el importe neto que ha cobrado?

Las acciones tienen dos valores: el valor **nominal**, es el que figura en el título de la acción, y el valor **efectivo** o real, es el valor con el que dicha acción cotiza en ese momento en la Bolsa. En este caso, el valor nominal de estas acciones era:

$$N = 150 \cdot 4,5 = 675 \text{ €}$$

El cambio o **cotización** expresa el porcentaje de ganancia o pérdida del valor efectivo sobre el valor nominal. En este caso, 175 % supone que 1 € nominal se ha convertido en 1,75 € efectivos, y se obtienen 0,75 euros por cada euro invertido en estas acciones.

El valor efectivo con el que se han vendido las acciones ha sido:

$$E = 675 \cdot \frac{175}{100} = 1.181,25 \text{ €}$$

Los gastos por comisión son:

$$1.181,25 \cdot \frac{3}{100} = 35,44 \text{ €}$$

El importe neto de la venta es: $1.181,25 - 35,44 = 1.145,81 \text{ €}$.

El dinero ganado con la operación es: $1.145,81 - 675 = 470,81 \text{ €}$.

- 4 Calcula el beneficio o pérdida neto que se obtendría al vender 85 acciones de una empresa de valor nominal 8 € al cambio del 85 %, con un gasto por comisión del 3 %.

- 5 Si necesito disponer de 300 €, ¿cuántas acciones de una empresa de 11 € de valor nominal deberé vender al cambio actual del 140 % para que, una vez restado el gasto del 3 % por gastos de comisión, obtenga los 300 €.

$$300 = x \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right) = 0,97 \cdot x \rightarrow x =$$