PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Problemas de Móviles

Para resolver problemas sobre móviles que llevan velocidad constante se utilizan las fórmulas del movimiento rectilíneo uniforme: $e = v \cdot t$ (espacio = velocidad × tiempo)

En sentido contrario (ENCUENTROS)

Si dos móviles se mueven en sentido contrario, la velocidad a la que se acercan es la suma de sus velocidades.

$$e_{AC} + e_{CB} = e_{AB} \Rightarrow \underbrace{v_A \cdot t}_{e_{AC}} + \underbrace{v_B \cdot t}_{e_{CB}} = e_{AB}$$

El tiempo que tardan en encontrarse es: $t = \dfrac{e_{AB}}{v_A + v_B}$

Ejemplo: Un tren sale de A hacia B con una velocidad de 180 Km/h y otro tren sale de B hacia A, por una vía paralela, con una velocidad de 70 Km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse si A dista de B 450 Km?

$$t = \frac{480}{180+70} = \frac{480}{250} = 1.92\,h \rightarrow 1h\ 55\,min\ 12\,s$$

En el mismo sentido (ALCANCES)

- Si dos móviles *salen de distinto punto al mismo tiempo* y se mueven en el mismo sentido, el más rápido al alcance del otro, la velocidad de aproximación es la diferencia de sus velocidades.

$$e_{AC} - e_{CB} = e_{AB} \Rightarrow \underbrace{v_A \cdot t}_{e_{AC}} - \underbrace{v_B \cdot t}_{e_{CB}} = e_{AB}$$

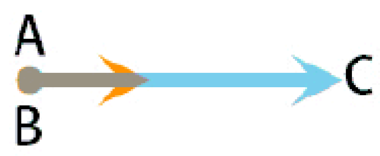
El tiempo que tarda uno en alcanzar al otro es $t = \dfrac{e_{AB}}{v_A - v_B}$

Ejemplo: Una moto va a 120 Km/h y una furgoneta a 90 Km/h. Si la moto sigue a la furgoneta a 75 Km de distancia ¿Cuánto tardará en alcanzarla?

$$t = \frac{75}{120-90} = \frac{75}{30} = 2.5\,h \rightarrow 2h\ \ 30\,\text{min}$$

- Dos móviles *salen del mismo punto uno antes que el otro*, y se mueven en el mismo sentido.

$$e_A = e_B \Rightarrow \underbrace{v_A \cdot t}_{e_{AC}} = \underbrace{v_B \cdot (t - x)}_{e_{AC}}$$



Problemas de grifos

En algunos problemas de grifos utilizamos la misma lógica empleada para los problemas de móviles: a) dos grifos vierten agua a un depósito → móviles en sentido contrario; b) grifo y desagüe vierten agua a la vez → móviles en el mismo sentido.

Ejemplo 1: Dos grifos vierten agua en un depósito de 3000 *l* de capacidad. Si el caudal del primero es de 50 *l/min* y el del segundo de 40 *l/min* ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar el depósito?

$$t = \frac{3000}{50+40} = \frac{3000}{90} = 33.\hat{3}\,min \rightarrow 33\,min\ 20\,s$$

Ejemplo 2: En una piscina de 50 m^3 de capacidad abrimos un grifo que echa agua a razón de 160 l/min, y al mismo tiempo abrimos el desagüe que vierte agua a razón de 700 l/min. ¿Cuánto tardará la piscina en vaciarse?

$$50\,m^3 \rightarrow 50.000\,l$$

$$t = \frac{50000}{700-160} = \frac{50000}{540} = 92{,}59 \text{ min} \rightarrow 1 \text{ h } 32 \text{ min } 35 \text{ s}$$

En otros utilizamos proporciones: *tiempo que tardan dos grifos sin/con desagüe en llenar/vaciar un depósito*

$$\text{Sin desagüe: } \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{x} \quad ; \quad \text{Con desagüe: } \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3} = \frac{1}{x}$$

Problemas de Mezclas

Los problemas de mezclas se resuelven colocando los datos en una tabla y calculando el precio de la mezcla como el cociente entre el coste total y la cantidad total

Se mezclan $x_A\,Kg$ de una sustancia A de y_A €$/Kg$ con $x_B\,Kg$ de una sustancia B de y_B €$/Kg$ ¿Cuál es el precio de la mezcla?

	Cantidad	Precio	Coste
sustancia A	x_A	y_A	$x_A \cdot y_A$
sustancia B	x_B	y_B	$x_B \cdot y_B$
MEZCLA	$x_A + x_B$	y_m	$x_A \cdot y_A + x_B \cdot y_B$

El promedio deseado se obtiene así: $y_m = \dfrac{x_A \cdot y_A + x_B \cdot y_B}{x_A + x_B}$

Ejemplo 1: Se mezclaron 12 Kg de café de 15.40 €/Kg con 8 Kg de café de 8.5 €/Kg ¿Cuál será el precio de la mezcla?

	Peso	Precio	Coste
café A	12 *Kg*	15.40 €	184.80 €
café B	8 *Kg*	8.50 €	68.00 €
	20 *Kg*		252.80 €

$$\rightarrow \frac{\text{Precio}}{\text{Mezcla}} = \frac{\text{Coste total}}{\text{Peso total}} = \frac{252.8}{20} = 12.64\,€/Kg$$

Problemas de Aleaciones

La ley de la aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total, (a veces la ley viene en %).
Se resuelven del mismo modo que los problemas de mezclas, teniendo en cuenta que la ley (%) de la aleación equivale al precio de la mezcla.

Ejemplo 2: Si mezclamos un lingote de 3500 g con un 80% de plata con otro lingote de 1500 g y un 95% de plata ¿Qué proporción de plata tendrá el nuevo lingote?

	Peso	%	Cantidad Ag
lingote A	3500 *g*	80%	2800 *g*
lingote B	1500 *g*	95%	1425 *g*
Total	5000 *g*		4225 *g*

$$\rightarrow \frac{\text{Proporción}}{\text{Lingote mezcla}} = \frac{\text{Cantidad total Ag}}{\text{Peso total lingote}} = \frac{4225}{5000} = 0.845 \rightarrow 84.5\%$$

Regla de tres compuesta

La regla de tres compuesta se emplea cuando se relacionan tres o más magnitudes, de modo que a partir de las relaciones establecidas entre las magnitudes conocidas obtenemos la desconocida.

Una regla de tres compuesta se compone de varias reglas de tres simples (directas, inversas o mixtas) aplicadas sucesivamente.

$$\left.\begin{array}{ccccc} A_1 & \rightarrow & \overbrace{B_1 & \rightarrow & C}^{\text{DIRECTA}} \\ \underbrace{A_2 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow}_{\text{INVERSA}} & x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{C}{x} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{B_1}{B_2} \rightarrow x = \frac{A_1 \cdot B_2 \cdot C}{A_2 \cdot B_1}$$

Ejemplo: Una cuadrilla de obreros levanta una pared de 30 m en 9 días a razón de 6 h/día. ¿Cuántos días necesitarán trabajando 8 h/día para levantar una pared de 50 m?

$$\left.\begin{array}{ccccc} 6 \text{ h/día} & \rightarrow & \overbrace{30 \text{ m} & \rightarrow & 9 \text{ días}}^{\text{DIRECTA}} \\ \underbrace{8 \text{ h/día} & \rightarrow & 50 \text{ m} & \rightarrow}_{\text{INVERSA}} & x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{9}{x} = \frac{8}{6} \cdot \frac{30}{50}$$

$$\rightarrow x = \frac{6 \cdot 50 \cdot 9}{8 \cdot 30} = 11{,}25 \text{ días} \rightarrow 11 \text{ días y 6 horas}$$

Problemas de Repartos

Repartos Directamente Proporcionales

Repartir un número X en partes directamente proporcionales a varios números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ consiste en hallar otros números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ directamente proporcionales a ellos y cuyo total sea X

Llamamos $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

Y llamamos $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Entonces $$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{X}{A}$$

De donde, por ejemplo, $x_1 = \dfrac{a_1 \cdot X}{A}$, etc...

Ejemplo: Tres socios pusieron 2, 3 y 6 millones, respectivamente, para crear una empresa. Si las ganancias del primer año fueron 79.200 € ¿Cuánto corresponderá a cada uno?

$$X = 79200 \quad ; \quad A = 2 + 3 + 6 = 11 \quad \rightarrow \quad \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{6} = \boxed{\frac{79200}{11} = 7200}$$

$$x_1 = 2 \cdot 7200 = 14400€ ; x_2 = 3 \cdot 7200 = 21600€ ; x_3 = 6 \cdot 7200 = 43.200€$$

Repartos Inversamente Proporcionales

Repartir un número X en partes inversamente proporcionales a varios números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ consiste en hallar otros números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inversamente proporcionales a ellos y cuyo total sea X

Llamamos $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

Y llamamos $A = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$

Entonces $$\frac{x_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{a_2}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{a_n}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \frac{X}{A}$$

De donde, por ejemplo, $x_1 = \dfrac{X}{a_1 \cdot A}$, etc...

Ejemplo: Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 5.900 €. Si sus edades son de 20, 24 y 32 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

$$X = 5900 \quad ; \quad A = \frac{1}{20} + \frac{1}{24} + \frac{1}{32} = \frac{59}{480} \quad ; \quad \frac{X}{A} = \frac{5900}{\frac{59}{480}} = 48000$$

$$\frac{x_1}{\frac{1}{20}} = 48000 \quad \rightarrow \quad 20 x_1 = 48000 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{48000}{20} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2.400€}$$

$$x_2 = \frac{48000}{24} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = 2.000€} \quad ; \quad x_3 = \frac{48000}{32} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_3 = 1.500€}$$

Problemas de Préstamos y Depósitos bancarios

El concepto de interés tiene que ver con el precio del dinero. Si alguien pide un préstamo debe pagar un cierto interés por ese dinero. Y si alguien deposita dinero en un banco, el banco debe pagar un cierto interés por ese dinero.

COMPONENTES (Préstamo o Depósito):

- El **capital** (principal), que es la cantidad de dinero inicial, prestado o depositado
- La **tasa** (rédito o tipo), que es la cantidad de dinero que se paga o se cobra por cada 100 en concepto de interés
- El **tiempo**, durante el cual el dinero se encuentra prestado o depositado y genera intereses
- El **interés**, que es la cantidad de dinero cobrado o pagado por el uso del capital durante todo el tiempo

El interés, como precio por el uso del dinero, puede ser:

Interés Simple

Se calcula sobre un capital inicial que permanece invariable. El interés obtenido en cada intervalo unitario de tiempo es el mismo, es decir, dicho interés no se suma al capital inicial.

Anual	*Por un periodo k*
$C_f = C_i \cdot \left(1 + \dfrac{r \cdot t}{100}\right)$	$C_f = C_i \cdot \left(1 + \dfrac{r \cdot t}{100 \cdot k}\right)$

Y solo para calcular el interés simple anual: $i = \dfrac{C_i \cdot r \cdot t}{100}$

Ejemplo: Hallar el interés producido, durante 5 años, por un capital de 75.000€, impuesto al 8% anual.

$$i = \frac{75000 \cdot 8 \cdot 5}{100} = 30.000€$$

Interés Compuesto

Representa el coste (préstamo) o el beneficio (depósito) de un capital inicial (C_i) a una tasa de interés (r) durante un período de tiempo (t), en el cual los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión se suman al capital inicial (***se capitalizan***), produciendo un capital final (C_f).

Para un período determinado sería:

Capital Final (C_f) = Capital Inicial (C_i) más los intereses

Anual	*Por un periodo k*
$C_f = C_i \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^t$	$C_f = C_i \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100 \cdot k}\right)^{t \cdot k}$

Periodos de capitalización

Anual.........	$k = 1$	*Cuatrimestral...*	$k = 3$	*Mensual...*	$k = 12$
Semestral...	$k = 2$	*Trimestral........*	$k = 4$	*Diario......*	$k = 360$

Ejemplo: En cuanto se transforman 20.600€, durante 3 años, al 6% anual si los periodos de capitalización son mensuales.

$$C_f = 20600 \cdot \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 12}\right)^{3 \cdot 12} = 20600 \cdot (1 + 0.005)^{36} = 24.651,62€$$