

Ejercicio 1.

En un trapecio isósceles, las diagonales miden 10 cm, la base menor 5 cm, y uno de los ángulos del mismo 60° . Hallar el área y el perímetro del trapecio.

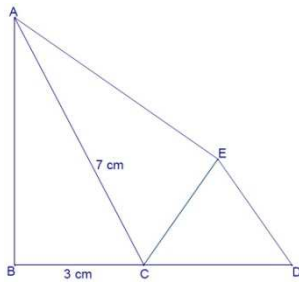
Ejercicio 2.

Resuelve la ecuación trigonométrica: $\operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$

03845

Ejercicio 3.

En la figura siguiente, los triángulos ABC y AEC son rectángulos e iguales. Además $ED=EC$, $BC= 3$ cm, $CA=7$ cm. Hallar el área del triángulo CED.

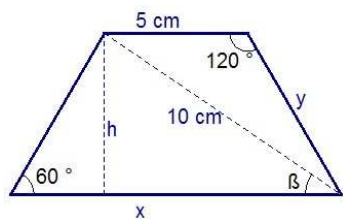


Ejercicio 4.

Si $\cotg \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, determina, sin usar la calculadora, el valor de $\cotg 2\alpha$, $\tg \frac{\alpha}{2}$, $\cos(\pi + 2\alpha)$ y $\sen 4\alpha$.

Ejercicio 1.

En un trapecio isósceles, las diagonales miden 10 cm, la base menor 5 cm, y uno de los ángulos del mismo 60° . Hallar el área y el perímetro del trapecio.



Si el trapecio es isósceles $\Rightarrow$ sus ángulos son iguales dos a dos y suplementarios entre ellos $\Rightarrow$ tendrá dos ángulos de 60° y otros dos de 120° .

Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado y :

$$10^2 = 5^2 + y^2 - 2 \cdot 5 \cdot y \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow 100 = 25 + y^2 + 5y \Rightarrow y^2 + 5y - 75 = 0 \Rightarrow y = \frac{-5 + 5\sqrt{13}}{2} \text{ cm} \quad (y \approx 6,5 \text{ cm})$$

Ahora aplicamos el teorema del seno para calcular el ángulo β y después la base x

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{y}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{y \cdot \sin 60^\circ}{10} \approx 0,564 \Rightarrow \beta = \arcsen(0,564) = 34,34^\circ \Rightarrow 180^\circ - 60^\circ - 34,34^\circ = 85,66^\circ$$

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin 85,66^\circ} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot \sin 85,66^\circ}{\sin 60^\circ} \Rightarrow x \approx 11,5 \text{ cm}$$

Perímetro del trapecio $P \approx 5 + 2 \cdot 6,5 + 11,5 = 29,5 \text{ cm}$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{y} \Rightarrow h = y \cdot \sin 60^\circ \approx 5,64 ; A_{\text{trapecio}} = \frac{B+b}{2} \cdot h \Rightarrow A_{\text{trapecio}} = \frac{11,5+5}{2} \cdot 5,64 = 46,53 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 2.

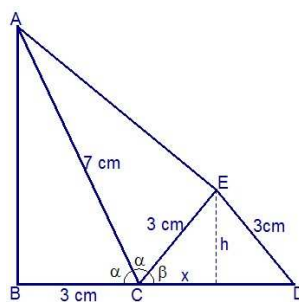
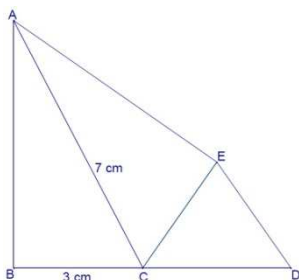
Resuelve la ecuación trigonométrica: $\sin^2 2x - \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$

$$\sin^2 2x - \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2\sin^2 2x - 2\sin x \cdot \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0 \quad (\sin 2x = t)$$

$$\Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 450^\circ \Rightarrow x = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 210^\circ \Rightarrow x = 105^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 330^\circ \Rightarrow x = 165^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 570^\circ \Rightarrow x = 285^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 690^\circ \Rightarrow x = 345^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 3.

En la figura siguiente, los triángulos ABC y AEC son rectángulos e iguales. Además $ED=EC$, $BC=3 \text{ cm}$, $CA=7 \text{ cm}$. Hallar el área del triángulo CED.



CED es un triángulo isósceles $\Rightarrow$ la altura correspondiente al vértice E divide la base CD en dos partes iguales.
Para calcular el área del triángulo CED necesitamos conocer los valores de x y h .

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \operatorname{sen} \beta \quad ; \quad \cos \beta = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3 \cdot \cos \beta$$

Entonces el problema se reduce a calcular las razones trigonométricas del ángulo β .

Por el teorema de Pitágoras $AB = 2\sqrt{10}$ y además tenemos que $\beta = 180^\circ - 2\alpha$

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}(180^\circ - 2\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12\sqrt{10}}{49}$$

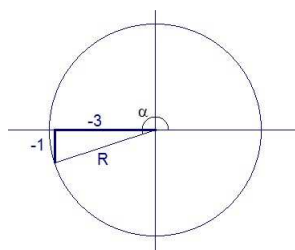
$$\cos \beta = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = -\left(\frac{9}{49} - \frac{40}{49}\right) = \frac{31}{49}$$

$$h = 3 \cdot \frac{12\sqrt{10}}{49} \Rightarrow h = \frac{36\sqrt{10}}{49} \quad ; \quad x = 3 \cdot \frac{31}{49} \Rightarrow x = \frac{93}{49}$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{2x \cdot h}{2} = x \cdot h = \frac{93}{49} \cdot \frac{36\sqrt{10}}{49} \Rightarrow A \approx 4,41 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 4.

Si $\cotg \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, determina, sin usar la calculadora, el valor de $\cotg 2\alpha$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\cos(\pi + 2\alpha)$ y $\operatorname{sen} 4\alpha$.



$\cotg \alpha = 3$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ como vemos en la figura, podemos calcular las razones trigonométricas del

ángulo α sobre el triángulo marcado, donde $R = \sqrt{10}$, $\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

$$\cotg 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{\cotg \alpha}{2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \stackrel{(1)}{=} -\frac{\sqrt{1-\cos \alpha}}{\sqrt{1+\cos \alpha}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{\sqrt{10}}}{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}} = -\sqrt{\frac{(\sqrt{10}+3)^2}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}} = -\sqrt{\frac{19+6\sqrt{10}}{1}} = -\sqrt{19+6\sqrt{10}}$$

$$\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = -\left(\frac{9}{10} - \frac{1}{10}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 4\alpha &= \operatorname{sen}(2\alpha + 2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2 \cdot (2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha) \cdot (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 4 \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \cdot \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{10}\right) = \\ &= 4 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} = 4 \cdot \frac{24}{100} = \frac{24}{25} \end{aligned} \quad (1) \left(\text{si } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0 \right)$$