

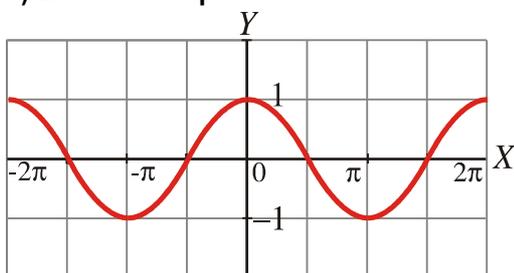
Examen de Matemáticas I (1º Bachillerato)
UNIDAD 5: FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Notas:

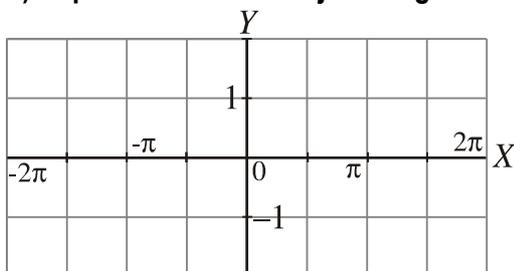
- 1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
- 2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
- 3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
- 4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1.

a) Escribe la expresión analítica de la función cuya gráfica es la siguiente: (0.5p)



b) Representa en estos ejes la siguiente función: $y = \text{sen}(x - \pi)$ (1p)



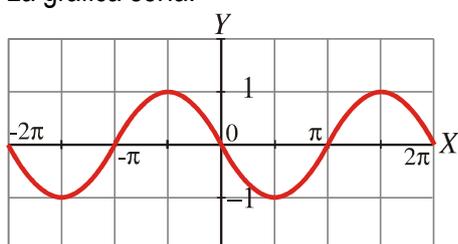
Solución:

a) La gráfica corresponde a la función $y = \cos x$.

b) Elaboramos una tabla de valores:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x - \pi$	-3π	$-5\pi/2$	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$y = \text{sen}(x - \pi)$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

La gráfica sería:



2. Demuestra que: $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$ (1p)

Solución:

Desarrollamos el primer miembro:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$
$$\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

Realizamos la resta, reduciendo previamente a común denominador. Posteriormente, simplificamos y queda:

$$\frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$$

Que es igual al segundo miembro.

3. Simplifica la siguiente expresión y, posteriormente, calcula su valor para $x = \pi/4$ (1p)

$$\frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{cos} 5x + \operatorname{cos} 3x}$$

Solución:

Desarrollamos numerador y denominador, transformando sumas en productos. Así queda,

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{5x+3x}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{5x-3x}{2}}{2 \operatorname{cos} \frac{5x+3x}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{5x-3x}{2}} = 2 \frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{cos} 4x} = 2 \operatorname{tg} 4x$$

$$\text{Si } x = \pi/4 \rightarrow 2 \cdot \operatorname{tg}(4 \cdot \pi/4) = 2 \operatorname{tg} \pi = 2 \cdot 0 = 0$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: (2.5p)

a)

$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{cos} 2x - 1 = \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

b)

$$\operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{cos} x = 3 \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x$$

Solución:

a)

$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{cos} 2x - 1 = \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen}^2 x$$
$$2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 = \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen}^2 x$$
$$2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 - \operatorname{cos} x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 0$$
$$2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 1 - \operatorname{cos} x = 0$$
$$2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + 1 - 1 - \operatorname{cos} x = 0$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

siendo $k \in \mathbf{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

b)

$$\cos^3 x - 3 \cos x = 3 \cos x \operatorname{sen} x$$

$$\cos^3 x - 3 \cos x - 3 \cos x \operatorname{sen} x = 0$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3 - 3 \operatorname{sen} x) = 0$$

$$\cos x (1 - \operatorname{sen}^2 x - 3 - 3 \operatorname{sen} x) = 0$$

$$\cos x (-\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x - 2) = 0$$

$$-\cos x (\operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x + 2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{array} \right. \\ \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x + 2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{array} \right.$$

$$\operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x = 270^\circ + 360^\circ k$$

Por tanto las soluciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{array} \right. \quad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

5. Establece una relación entre las razones trigonométricas de los ángulos que miden $8\pi/9$ y $17\pi/9$. Justifica tu respuesta, basándote en la posición que ocupa cada uno de los ángulos sobre la circunferencia goniométrica. (1p)

Solución:

$$\frac{17\pi}{9} - \frac{8\pi}{9} = \frac{9\pi}{9} = \pi \rightarrow \text{son ángulos que difieren en } \pi$$

$$\operatorname{sen} \frac{17\pi}{9} = \operatorname{sen} \left(\pi + \frac{8\pi}{9} \right) = -\operatorname{sen} \frac{8\pi}{9}$$

$$\cos \frac{17\pi}{9} = -\cos \frac{8\pi}{9}$$

$$\operatorname{tg} \frac{17\pi}{9} = \operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}$$

6. Expresa $A(x)$ en función de $\sin x$ y $\cos x$: (1p)

$$A(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Solución:

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \overbrace{\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{2}}^0 - \overbrace{\cos x \cdot \sin \frac{\pi}{2}}^1 = -\cos x & \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) &= \underbrace{\cos x \cdot \cos \frac{3\pi}{2}}_0 - \underbrace{\sin x \cdot \sin \frac{3\pi}{2}}_{-1} = \sin x \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) &= -\cos x + \sin x \end{aligned}$$

7. Resuelve el siguiente sistema dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante, en radianes. (2p)

$$\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución:

De la segunda ecuación obtenemos que:

$$2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$

Como:

$$\begin{aligned} x + y = 120^\circ &\rightarrow 2 \cos 60^\circ \sin \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \frac{x-y}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow \\ &\frac{x-y}{2} = 30^\circ \rightarrow x - y = 60^\circ \end{aligned}$$

De este modo, obtenemos que:

$$\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ x - y = 60^\circ \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción, obtenemos que:

Sumando ambas ecuaciones: $2x = 180^\circ$ y por tanto, $x = 90^\circ$ e $y = 30^\circ$

La solución buscada a la ecuación, en el primer cuadrante es: $(90^\circ, 30^\circ)$