1. Halla las restantes razones trigonométricas utilizando las relaciones entre las razones trigonométricas (para la resolución del ejercicio es **obligatorio** operar con fracciones y radicales): **(2 puntos; 1 por apartado)**

a) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{3}$; teniendo en cuenta que $180^{o} < \alpha < 270^{o}$

b) $\operatorname{tg}\beta = -2$; teniendo en cuenta que $90^{o} < \beta < 180^{o}$

2. Expresa las siguientes razones como razones de un ángulo del primer cuadrante: **(1 punto; 0,25 por apartado)**

a) $\operatorname{sen} 95^{o} =$

b) $\cos 235^{o} =$

c) $\operatorname{tg} 335^{o} =$

d) $\operatorname{sen} 201^{o} =$

3. Halla las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que $2\cos\alpha = 3\text{tg}\alpha$ y suponiendo que α es desconocido pero se encuentra en el primer cuadrante. **(1 punto)**

4. Resuelve un triángulo en el que $a = 8$ cm, $b = 12$ cm y $B = 150^{\text{o}}$ **(1 punto)**

5. Las diagonales de un paralelogramo miden 5 y 6 centímetros respectivamente. Se cortan bajo un ángulo de $50^{\circ}\ 10'$. Halla el perímetro del paralelogramo: **(1,5 puntos)**

6. Dos circunferencias secantes tienen radios 6 cm y 8 cm. El ángulo que forman sus dos tangentes comunes es de 30°. Calcula la distancia que hay entre los dos centros de las circunferencias. **(1,5 puntos)**

7. Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48°. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14°. Calcular la altura del edificio. **(2 puntos)**

1. Halla las restantes razones trigonométricas utilizando las relaciones entre las razones trigonométricas (para la resolución del ejercicio es **obligatorio** operar con fracciones y radicales): **(2 puntos; 1 por apartado)**

a) $\text{sen}\alpha = -\frac{2}{3}$; teniendo en cuenta que $180 < \alpha < 270$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{4}{9} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \underline{\underline{\cos\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{3}}} \quad (180 < \alpha < 270)$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-2/3}{-\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$$

b) $\text{tg}\beta = -2$; teniendo en cuenta que $90 < \beta < 180$

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = -2 \Rightarrow \text{sen}\,\beta = -2\cos\beta \Rightarrow (-2\cos\beta)^2 + \cos^2\beta = 1$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow 5\cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{-\sqrt{5}}{5}}} \quad (90 < \beta < 180)$$

$$\text{sen}\,\beta = -2\cos\beta = -2\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\text{sen}\,\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}}}$$

2. Expresa las siguientes razones como razones de un ángulo del primer cuadrante: **(1 punto; 0,25 por apartado)**

a) sen 95º = $\text{sen}\,85^\circ = \cos 5^\circ$

b) cos 235º = $-\cos 55^\circ = -\text{sen}\,35^\circ$

c) tg 333º = $-\text{tg}\,27^\circ$

d) sen 201º = $-\text{sen}\,21^\circ = -\cos 69^\circ$

3. Halla las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que $2\cos\alpha = 3\mathrm{tg}\alpha$ y suponiendo que α es desconocido pero se encuentra en el primer cuadrante. **(1 punto)**

$$2\cos\alpha = 3\,\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow 2\cos\alpha = 3\,\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$\Rightarrow \mathrm{sen}^2\alpha + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha = 1$. Llamando $\mathrm{sen}\,\alpha = x$:

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 1 \Rightarrow 2x^2 + 3x = 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

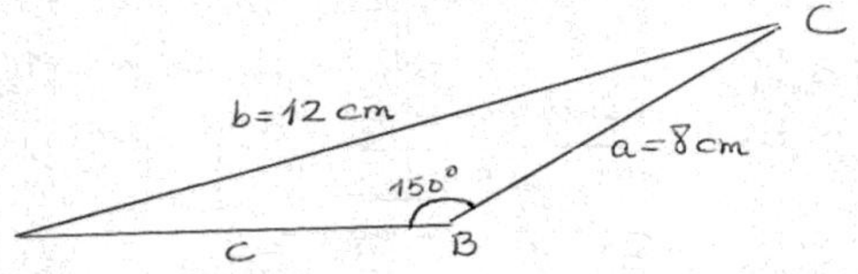
Como α se encuentra en el 1^{er} cuadrante

$\underline{\underline{x = \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}}}$. Como $\cos^2\alpha = \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

4. Resuelve un triángulo en el que a = 8 cm., b = 12 cm. y B = 150º **(1 punto)**



$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,B} \Rightarrow \frac{8}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{12}{0'5} \Rightarrow$$

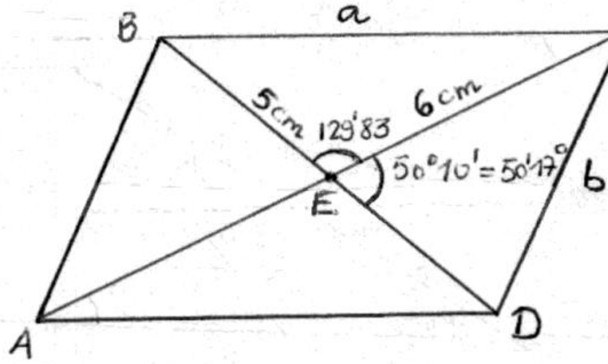
$$\Rightarrow \mathrm{sen}\,A = \frac{8\cdot 0'5}{12} = 0'33 \Rightarrow \underline{\underline{A = 19'47^\circ}}$$

Por tanto $C = 180 - 150 - 19'47 \Rightarrow \underline{\underline{C = 10'53^\circ}}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow c^2 = 8^2 + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12\cos 10'53$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = 4'39\text{ cm}}}$$

5. Las diagonales de un paralelogramo miden 5 y 6 centímetros respectivamente. Se cortan bajo un ángulo de 50º 10'. Halla el perímetro del paralelogramo: **(1,5 puntos)**



Obsérvese que

$\overline{BE} = \overline{ED} = 2'5$ cm

$\overline{CE} = \overline{EA} = 3$ cm

En el triángulo $\widehat{CED}$: $b^2 = 3^2 + 2'5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2'5 \cos 50'17^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = 5'64 \Rightarrow b = 2'38$

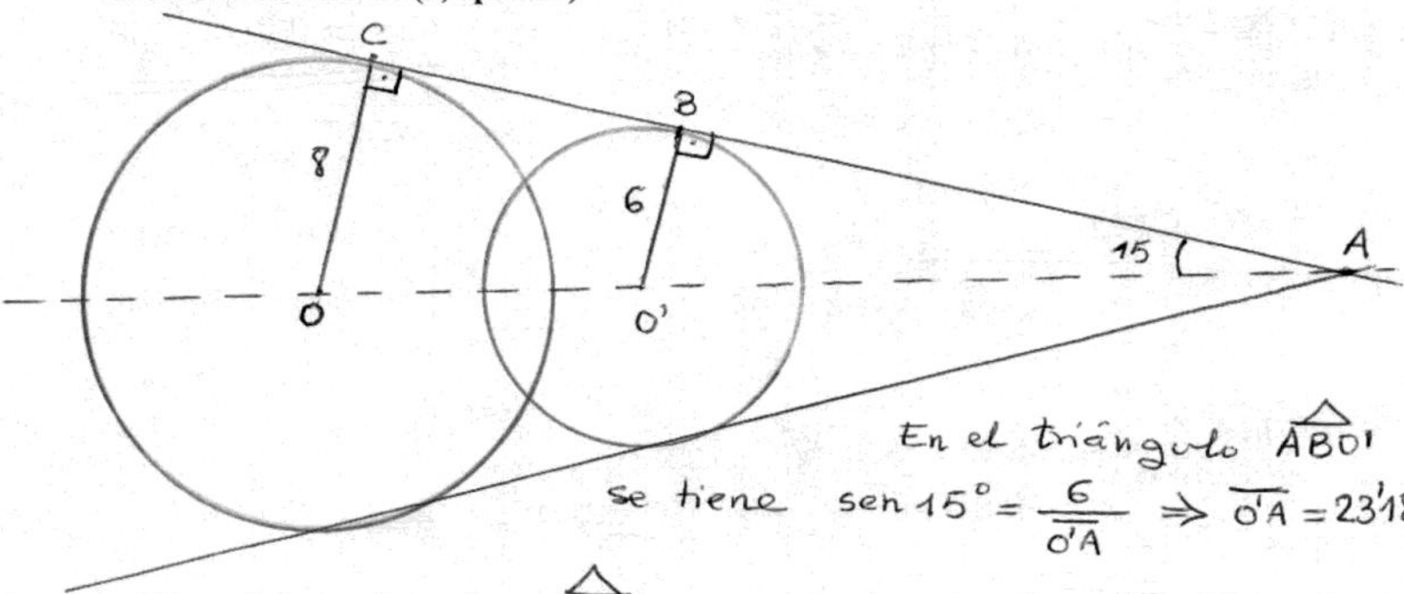
En el triángulo $\widehat{BEC}$: $a^2 = 3^2 + 2'5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2'5 \cos 129'83 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 24'86 \Rightarrow a = 4'99$

Por tanto el perímetro p del paralelogramo es:

$p = 2a + 2b = 2 \cdot 4'99 + 2 \cdot 2'38 = \underline{\underline{14'74 \text{ cm}}}$

6. Dos circunferencias secantes tienen radios 6 cm. y 8 cm. El ángulo que forman sus dos tangentes comunes es de 30º. Calcula la distancia que hay entre los dos centros de las circunferencias. **(1,5 puntos)**



En el triángulo $\widehat{ABO'}$ se tiene $\text{sen } 15^\circ = \dfrac{6}{\overline{O'A}} \Rightarrow \overline{O'A} = 23'18$

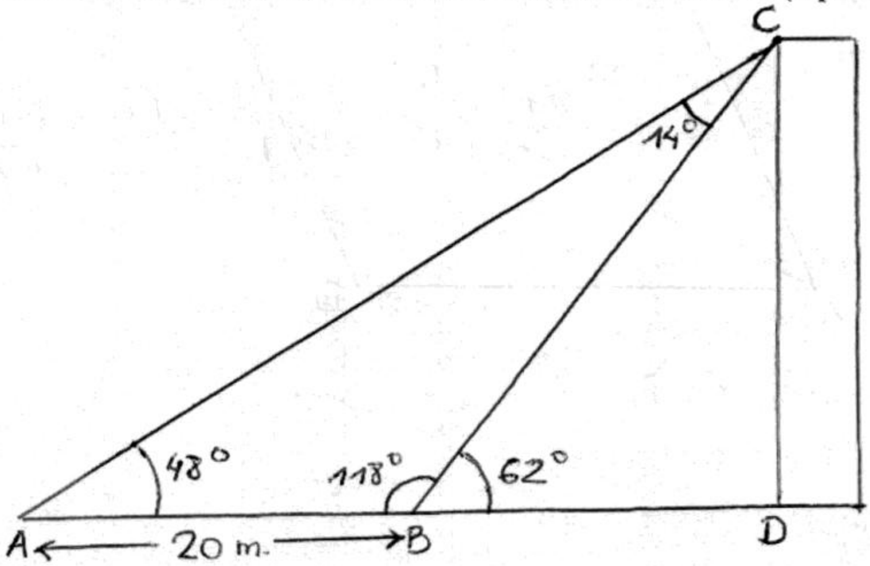
En el triángulo $\widehat{ACO}$ tenemos $\text{sen } 15^\circ = \dfrac{8}{\overline{OA}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{OA} = 30'91$.

Por tanto $\overline{OO'} = \overline{OA} - \overline{O'A} = 30'91 - 23'18 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{\overline{OO'} = 7'73 \text{ cm}}}$

7. Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48°. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14°. Calcular la altura del edificio. **(2 puntos)**



En el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ $\quad \dfrac{\overline{AC}}{\text{sen}\,118°} = \dfrac{20}{\text{sen}\,14°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AC} = \dfrac{20 \cdot \text{sen}\,118°}{\text{sen}\,14°} \Rightarrow \overline{AC} = 72'99$ m.

En el triángulo $\overset{\triangle}{ACD}$ $\quad \text{sen}\,48° = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{CD} = 72'99 \cdot \text{sen}\,48 \Rightarrow \underline{\underline{\overline{CD} = 54'25 \text{ m.}}}$