Matemáticas I - 1º de Bachillerato
Recuperación de la Segunda Evaluación - 12 de abril de 2011

1. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: (**1 punto**)
$$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$

2. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica, teniendo en cuenta que *no está permitido usar números decimales, sólo fracciones y radicales con las razones trigonométricas de los ángulos fundamentales*. (**1 punto**)
$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

3. Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{x} = (-2, 3)$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u} = (2, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (-4, 2)$. (**1 punto**)

4. Las rectas $r \equiv 3x + 2y - 1 = 0$ y $s \equiv x + ky - 2 = 0$, forman un ángulo de 60º. Halla k. (**1 punto**)

5. Contesta a los siguientes apartados:

   a) Hallar las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua, general y afín de la recta r que pasa por los puntos $P(2, 3)$ y $Q(-4, 1)$. (**1 punto**)

   b) ¿Cuál es la pendiente de la recta $3x - 2y + 5 = 0$? Halla el ángulo que forma tal recta con el eje X. (**1 punto**)

   c) Hallar la distancia del punto $P(2, 5)$ a la recta $r \equiv x - 3y + 5 = 0$. (**1 punto**)

   d) Hallar el ángulo que forman las rectas r y s, donde
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \quad ; \quad s \equiv y = 3x - 7 \qquad (\textbf{1 punto})$$

6. Dado el triángulo de vértices $A(-2, -5)$, $B(-1, 2)$ y $C(3, 0)$, calcula:

   a) La longitud de la altura que pasa por el vértice A. (**1,5 puntos**)

   b) El área del triángulo. (**0,5 puntos**)

Soluciones

1. $\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$

2. $\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

   Multiplicando todos los términos por $\operatorname{sen}^2 x$ para eliminar denominadores:

   $$\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

   Entonces:

   $$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = 90^{\circ} + 360^{\circ}k \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210^{\circ} + 360^{\circ}k \\ x = 330^{\circ} + 360^{\circ}k \end{cases} \end{cases}$$

3. Llamemos (a, b) a las coordenadas de $\overrightarrow{x}$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Entonces: $(-2, 3) = a(2, 1) + b(-4, 2) = (2a, a) + (-4b, 2b) = (2a - 4b, a + 2b) \Rightarrow$

   $$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 4b = -2 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 4b = -2 \\ -2a - 4b = -6 \end{cases} \Rightarrow -8b = -8 \Rightarrow b = 1.$$

   Sustituyendo por ejemplo en la segunda ecuación del sistema inicial, $a = 1$. Así pues las coordenadas de $\overrightarrow{x}$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son $(1, 1)$.

4. Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (-2, 3)$ y un vector director de s es $\overrightarrow{v} = (-k, 1)$. Entonces:

   $$\cos 60^{\circ} = \frac{(-2,3) \cdot (-k,1)}{|(-2,3)||(-k,1)|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2k+3}{\sqrt{13}\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{13k^2 + 13} = 4k + 6 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow 13k^2 + 13 = 16k^2 + 48k + 36 \Leftrightarrow 3k^2 + 48k + 23 = 0$$

   Resolviendo la ecuación de segundo grado:

   $$k = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 3 \cdot 23}}{2 \cdot 3} = \frac{-48 \pm \sqrt{2028}}{6} = \frac{-48 \pm 26\sqrt{3}}{6} = -8 \pm \frac{13\sqrt{3}}{3} \approx \begin{cases} k_1 = -0{,}494 \\ k_2 = -15{,}5 \end{cases}$$

5. a) Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PQ}=(-6,-2)$. Entonces:

- Ecuación vectorial: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+t\,\overrightarrow{v}\Rightarrow \boxed{(x,y)=(2,3)+t(-6,-2)}$
- Ecuaciones paramétricas: $\boxed{\begin{cases} x=2-6t \\ y=3-2t \end{cases}}$
- Ecuación continua: $\boxed{\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y-3}{-2}}$
- Ecuación general: $-2x+4=-6y+18\Leftrightarrow \boxed{-2x+6y-14=0}$
- Ecuación afín: $6y=2x+14\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{6}x+\dfrac{14}{6}\Leftrightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}}$

b) Despejando y tenemos: $2y=3x+5\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$. Entonces la pendiente de la recta es $m=\dfrac{3}{2}$. Por tanto $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\alpha=56{,}31^{\text{o}}$, donde α es el ángulo que forma la recta con el eje X.

c) $d(P,r)=\dfrac{|1\cdot 2+(-3)\cdot 5+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}=\dfrac{8\sqrt{10}}{10}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}=\approx 2{,}53$

d) Un vector director de r es $\overrightarrow{u}=(2,1)$ y un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v}=(1,3)$ (la ecuación general de la recta s es $3x-y-7=0$). Llamando α al ángulo que forman las dos rectas:

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}=\frac{|2\cdot 1+1\cdot 3|}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5\sqrt{50}}{50}=$$

$$=\frac{5^2\cdot\sqrt{2}}{5^2\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^{\text{o}}$$

6. La recta que pasa por $B(-1,2)$ y $C(3,0)$ tiene vector director $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BC}=(4,-2)$. Por tanto su ecuación es:

$$r\equiv\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-2}\Leftrightarrow r\equiv -2x-2=4y-8\Leftrightarrow r\equiv 2x+4y-6=0\Leftrightarrow r\equiv x+2y-3=0$$

Un vector perpendicular a la recta anterior es $\overrightarrow{v}=(2,4)$. Por tanto la recta perpendicular a la anterior que pasa por $A(-2,-5)$ es:

$$s\equiv\frac{x+2}{2}=\frac{y+5}{4}\Leftrightarrow s\equiv 4x+8=2y+10\Leftrightarrow s\equiv 4x-2y-2=0\Leftrightarrow s\equiv 2x-y-1=0$$

El punto P de corte de r y s es la solución al sistema de ecuaciones formado por las dos rectas:

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow P=(1,1)$$

a) La longitud h de la altura que pasa por el vértice A es:

$$h=d(A,P)=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(1-(-2))^2+(1-(-5)^2)}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$$

b) La longitud de la base b correspondiente a la altura h calculada en el apartado anterior es:

$$b=d(B,C)=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(3-(-1))^2+(0-2)^2)}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$$

Por tanto el área S del triángulo es:

$$S=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{20}\sqrt{45}}{2}=\frac{\sqrt{900}}{2}=\frac{30}{2}=15\text{ u}^2$$