Examen Geometría Analítica (vectores)

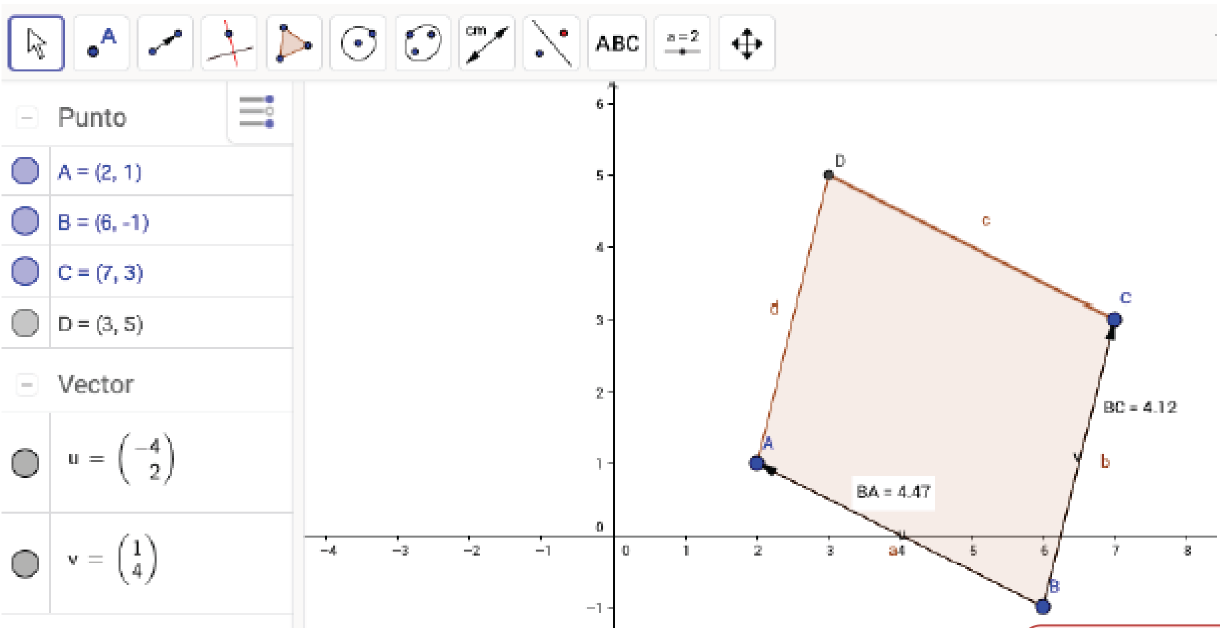
Instrucciones para el examen:

- Expresa los resultados con fracciones y radicales siempre que sea posible. En caso de usar decimales, redondea a la centésima.
- Aunque utilices calculadora, muestra claramente los pasos y tu conocimiento de las propiedades que se están aplicando. Tan importante como los resultados es el proceso, explícalo claramente.
- Puedes hacer las preguntas en el orden que quieras pero sé claro/a, limpio/a, ordenado/a y cuidadoso/a con la ortografía. No se corregirá lo que no se entienda claramente.

1. **(2,5 puntos)** Dados los puntos de coordenadas $A(2,1)$, $B(6,-1)$ y $C(7,3)$.

   a) **(1 punto)** Demostrar que no están alineados y que por tanto se pueden considerar los vértices de un paralelogramo.
   b) **(0,5 puntos)** Representar dichos vértices en el plano cartesiano y calcular las coordenadas del cuarto vértice **D**, sabiendo que es el opuesto al vértice **B**. Hacerlo analíticamente y comprobarlo gráficamente.
   c) **(1 punto)** Averiguar cuál es el perímetro del paralelogramo **ABCD** calculando el módulo de los vectores que consideres necesario.

SOLUCIÓN:



0,8 p a) $\vec{u}=\overrightarrow{BA}=(2-6,1-(-1))=\underline{(-4,2)} \rightarrow |\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}\simeq 4'47$

$\vec{v}=\overrightarrow{BC}=(7-6,3-(-1))=\underline{(1,4)} \rightarrow |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}\simeq 4'12$

Planteamiento: 0,25
Cada vector: 0,25
Solución: 0,25

$$\frac{-4}{1}\neq\frac{2}{4}\ \textit{Como las coordenadas no son proporcionales,}$$

los vectores no son linealmente dependientes y por tanto los puntos no están alineados

0,6 p b) En el dibujo: $D=(d_x,d_y)$ $\overrightarrow{CD}$ equipolente a $\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CD}=(d_x-7,d_y-3)=(-4,2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_x-7=-4 \Rightarrow d_x=-4+7=3 \\ d_y-3=2 \Rightarrow d_y=2+3=5 \end{array}\right\} \boxed{D(3,5)}$

Dibujo: 0,25
Analítico: 0,5
Gráfico: 0,25

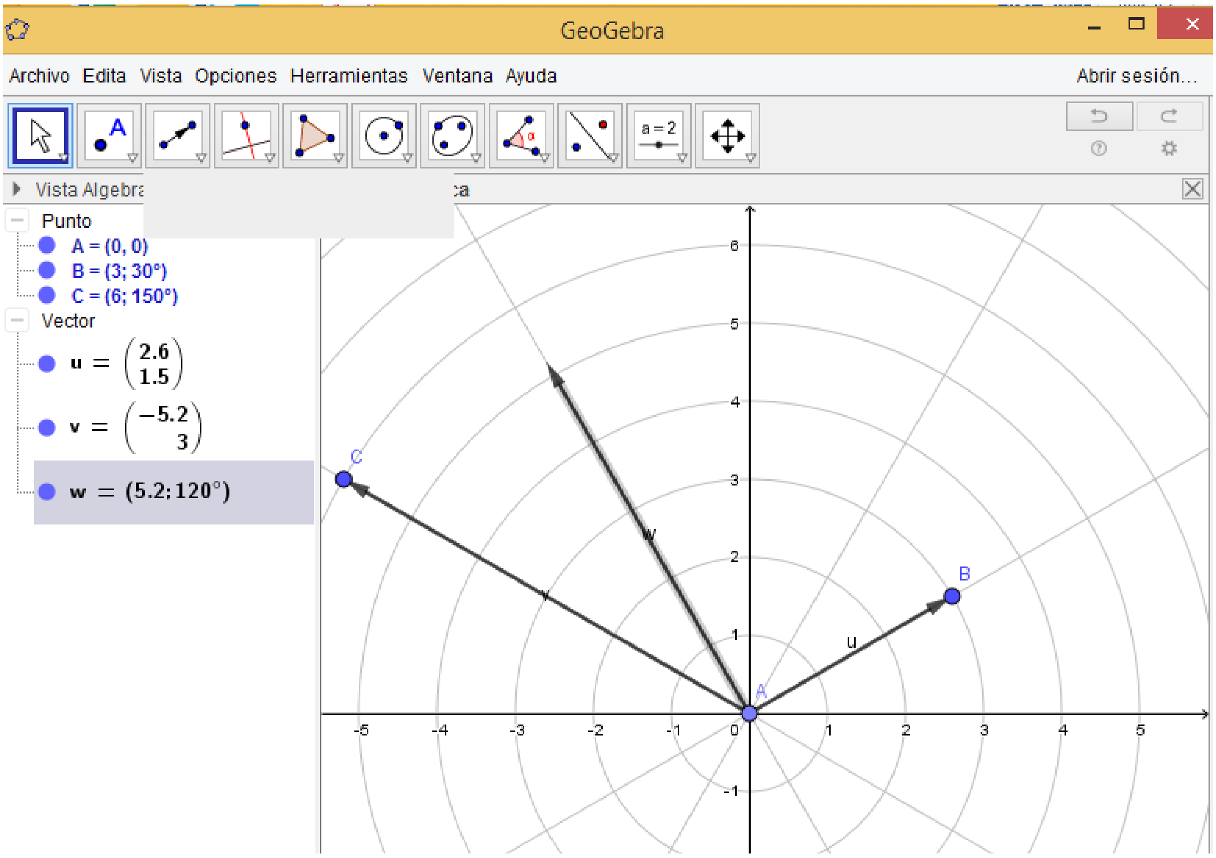
0,6 p. d) Perímetro $ABCD = 2|\overrightarrow{BA}|+2|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{20}+2\sqrt{17}\simeq 2\cdot 4'47+2\cdot 4'12=\boxed{17'18u}$

Módulos: 0,25·2
Perímetro: 0,25
Solución: 0,25

2. **(2 puntos)** Dos vectores cuyo origen se encuentra en el origen de coordenadas, tienen por módulos 3 y 6 respectivamente, y forman con el semieje positivo de las abscisas ángulos de 30º y 150º. Se calcula el vector resultante de la suma de ambos vectores y se pide:

   a) Su módulo
   b) El ángulo que forma dicho vector resultante con el eje positivo de las abscisas.

SOLUCIÓN:



Se pasan u y v a coordenadas cartesianas para poderlo sumar.

$$\vec{u} = (3 \cdot cos30°, 3 \cdot sen30°) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) = (2'6, 1'5)$$

$$\vec{v} = (6 \cdot cos150°, 6 \cdot sen30°) = \left(-\frac{6\sqrt{3}}{2}, \frac{6}{2}\right) = (-3\sqrt{3}, 3) = (-5'2, 3)$$

Después se suma y se pasa el vector resultante a polares, calculando para ello su módulo y su argumento:

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) + (-3\sqrt{3}, 3) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{6\sqrt{3}}{2}, \frac{6}{2}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right) = (-2'6, 4'5)$$

$$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}+\frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{108}{4}} = \sqrt{27} = 5{,}2$$

$$arctg\left(\frac{\frac{9}{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right) = arctg\left(\frac{3}{-\sqrt{3}}\right) = 120°$$

Pasar a cartesianas: 0,4·2
Suma bien: 0,2
Módulo: 0,5
Argumento: 0,5

---

3. **(2 puntos)** Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{2m-3,-8})$ y $\vec{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{-10,\ 5m-4})$, hallar los valores del parámetro “$\boldsymbol{m}$” para que:
   a) Ambos vectores son linealmente dependientes.
   b) Ambos vectores sean perpendiculares.

SOLUCIÓN:

a)

Para que sean linealmente dependientes, sus componentes deben ser proporcionales.

Cada apartado:
Planteamiento: 0,5
Cálculos: 0,5

$$\frac{2m-3}{-10} = \frac{-8}{5m-4} \Rightarrow (2m-3)(5m-4) = (-8)\cdot(-10)$$

$$10m^2-8m-15m+12 = 80 \Rightarrow 10m^2-23m-68=0$$

$$m = \frac{23\pm\sqrt{23^2-4\cdot 10\cdot(-68)}}{2\cdot 10} = \frac{23\pm\sqrt{529+2720}}{20} = \frac{23\pm\sqrt{3249}}{20} = \frac{23\pm 57}{20} = \begin{cases} \boxed{x_1 = \frac{80}{20} = 4} \\ \boxed{x_2 = -\frac{34}{20} = -1'7} \end{cases}$$

b) Para que sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -20m+30-40m+32 = -60m+62 = 0 \leftrightarrow m = \frac{62}{60} = \frac{31}{30}$$

---

4. **(2 puntos)** Expresar el vector $\vec{\boldsymbol{w}}\,(\boldsymbol{10,3})$ como combinación lineal de los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{2,3})$ y $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{-4,2})$ y representar gráficamente.

Para que $\vec{w}$ sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, debo encontrar dos escalares a y b tales que:

Planteamiento: 0,5
Cálculos: 1
Gráfica: 0,5

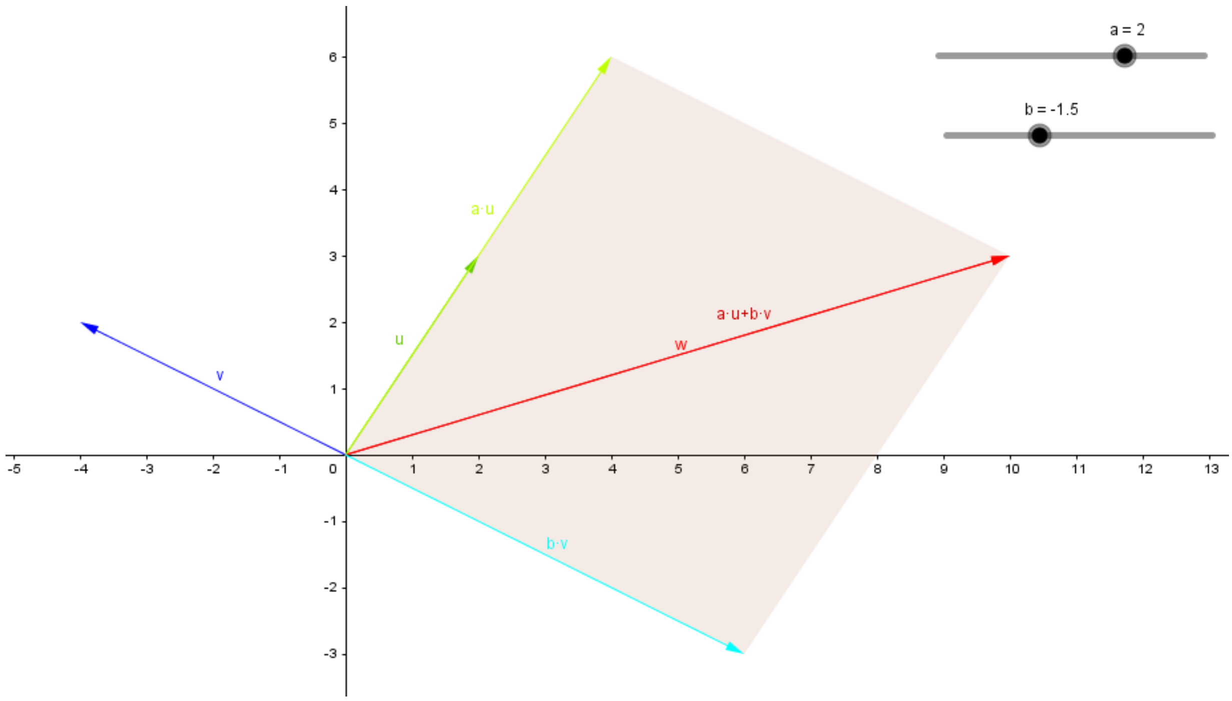
$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Rightarrow (10,3) = a(2,3) + b(-4,2) = (2a,3a) + (-4b,2b) =$$

$$(10,3) = (2a-4b,\, 3a+2b) \Rightarrow \begin{cases} 10 = 2a-4b \Rightarrow 5 = a-2b \Rightarrow a = 5+2b \\ 3 = 3a+2b \Rightarrow 3 = 3(5+2b)+2b = 15+6b+2b \end{cases}$$

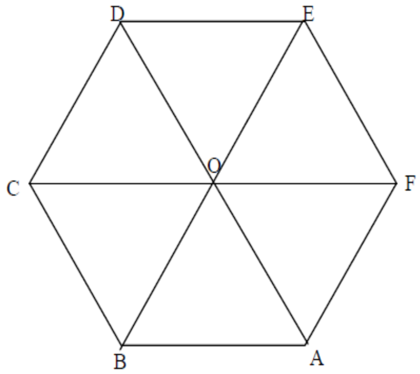
$$3 = 15+8b \Rightarrow b = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

$$a = 5+2\left(\frac{-3}{2}\right) = 5-3 = 2$$

$$\boxed{a=2 \quad b=-\frac{3}{2}}$$



5. **(1 punto)** Observa la imagen y completa con escalares (que pueden ser ceros) los huecos que hay para que sean ciertas las siguientes combinaciones lineales de vectores.



$$\overrightarrow{AF} = (-1)\cdot\overrightarrow{OB} + \ 0\cdot\overrightarrow{CO}$$

$$\overrightarrow{CF} = 2\cdot\overrightarrow{DO} + 2\cdot\overrightarrow{BO}$$

$$\overrightarrow{BE} = \ 2\cdot\overrightarrow{CO} + \ 2\cdot\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{DE} = (-1)\cdot\overrightarrow{OB} + (-1)\cdot\overrightarrow{FE}$$

$$\overrightarrow{BE} = (-2)\cdot\overrightarrow{OB} + \ 0\cdot\overrightarrow{CO}$$