Examen 1ª Evaluación

Instrucciones para el examen:

- Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
- **CALIFICACIÓN:** Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos, la 3ª y la 4ª sobre 2 puntos. En el enunciado se especifica la valoración de cada apartado. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
- **TIEMPO:** 90 minutos.
- Aunque utilices calculadora, muestra claramente los pasos y tu conocimiento de los conceptos y las fórmulas matemáticas que se están aplicando.
- Evita el uso de decimales. Expresa los resultados en forma de fracciones y radicales. En caso de tener que usarlos, redondea a la centésima.
- Sé claro/a, limpio/a, ordenado/a y cuida la ortografía. No se corregirá lo que no se entienda claramente.

1. Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto).** Determinar la matriz P^{-1} , inversa de la matriz P

b) **(1 punto).** Determinar la matriz B^{-1} , inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) **(1 punto).** Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

SOLUCIÓN:

a) Para calcular la inversa de P calculamos primero su determinante, que debe dar distinto de cero. Luego la adjunta, la trasponemos y por último la dividimos entre el determinante. Por tanto queda:

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow P^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow (P^*)^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{(P^*)^t}{|P|} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Procedimiento: 0,5
Cálculos: 0,5

b) Para calcular la inversa de J hacemos los mismos pasos que en el apartado anterior:

$$|J| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow J^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (J^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \frac{(J^*)^t}{|J|} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Planteamiento: 0,5
Cálculos: 0,5

Por último sólo faltaría multiplicar

$$B = P^{-1}J^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Al calcular la inversa de esta matriz se obtiene:

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \to B^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \to (B^*)^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(B^*)^t}{|B|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Un camino mucho más corto, utilizando las propiedades de la inversa, sería:

$$B = P^{-1}J^{-1} = (JP)^{-1} \to B^{-1} = ((JP)^{-1})^{-1} = JP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Calculemos primero A^2 sabiendo que $A = PJP^{-1}$

$$A^2 = (PJP^{-1}) \cdot (PJP^{-1}) = PJP^{-1}PJP^{-1} = PJ^2P^{-1}$$

Como sólo me piden el determinante no hace falta que calcule la matriz. Basta con aplicar las propiedades de los determinantes, en particular la que dice que el determinante de un producto es el producto de los determinantes, que en particular se aplica a las potencias y a la inversa como se muestra a continuación:

$$\det A^2 = \det PJ^2P^{-1} = detP \cdot detJ^2 \cdot detP^{-1} = detP \cdot detP^{-1}(detJ)^2$$
$$= \det(PP^{-1})(detJ)^2 = detI \cdot (detJ)^2 = 1 \cdot (-2)^2 = 4$$

También podría haberse razonado así:

$|A| = |PJP^{-1}| = |P||J||P^{-1}| = |P||J|\frac{1}{|P|} = |J| = -2$. Luego $|A^2| = |A|^2 = (-2)^2 = 4.$

Un último razonamiento, más largo y que da lugar a más errores es calcular las matrices A y A^2 y terminar calculando el determinante de esta última.

A:=P*J*Inversa(P)

$$\rightarrow \ \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -8 & -5 & 10 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

A^2

$$\rightarrow \ \begin{pmatrix} 13 & 0 & -6 \\ 12 & 1 & -6 \\ 18 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Determinante({{13, 0, -6}, {12, 1, -6}, {18, 0, -8}})

$\rightarrow$ **4**

---

2. (3 puntos) Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o los valores de "k" que hacen que el determinante de la matriz $(M - kI)$ sea igual a 0.
b) (1 punto) Discutir el sistema $(M - kI)X = O$ según los valores de "k"
c) (1 punto). Para $k = -1$, resolver el sistema de ecuaciones: $(M - kI)X = O$

SOLUCIÓN:

a) $M-kI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

$$\boxed{M-kI = \begin{pmatrix} 1-k & 2 & 0 \\ 2 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 3-k \end{pmatrix}}$$

Calcular M-kI: 0,2
Determinante: 0,4
Soluciones: 0,4

$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 0 \\ 2 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 3-k \end{vmatrix}$ desarrollando por los elementos de C_3 $= (3-k)\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} =$

$|M-kI|$

$= (3-k)\left[(1-k)^2-4\right] = (3-k)(1+k^2-2k-4) = \boxed{(3-k)(k^2-2k-3)}$

$(3-k)(k^2-2k-3)=0 \rightarrow 3-k=0 \rightarrow \boxed{k=3}$

$\rightarrow k^2-2k-3=0$

$k = \dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2\pm4}{2} \rightarrow \boxed{k=3}$, $\boxed{k=-1}$

$$\boxed{|M-kI|=0 \rightarrow \boxed{k=3} \text{ doble}, \ \boxed{k=-1}}$$

b) Por tratarse de un sistema homogéneo sabemos que siempre va a existir la solución trivial y que los rangos de $A = M - kI$ y su ampliada A⁺ siempre coinciden, es decir, siempre va a ser compatible.

$\boxed{k \neq -1{,}3}$

Como $|A| \neq 0 \rightarrow \begin{cases} rg\ A = 3 = rg\ A^+ \\ n = 3 \end{cases} \rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

Única solución la trivial: x = 0, y = 0, z = 0

$\boxed{k = -1}$

Entonces $|A| = 0$, observemos la matriz A para ver si tiene rango 2 o 1. No es necesario estudiar el rango de A⁺, porque coincide con el de A:

$$A = M - kI = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{r = 2}$$

Caso 1: 0,3
Casos 2 y 3: 0,35

Por tanto $\begin{cases} r = 2 = r^+ \\ n = 3 \end{cases} \rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado*

$\boxed{k = 3}$

Entonces $|A| = 0$, observemos la matriz A para ver si tiene rango 2 o 1. No es necesario estudiar el rango de A⁺, porque coincide con el de A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_1 = -F_2 \\ F_3 = nula \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{r = 1}$$

Por tanto $\begin{cases} r = 1 = r^+ \\ n = 3 \end{cases} \rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

c) Para $k = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - kI)X = O$. Como muestra la discusión anterior en este caso el sistema es compatible indeterminado, por lo que tiene infinitas soluciones.

Planteamiento: 0,25
Soluciones: 0,25·3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{se pide:}$$

$$(M - kI)X = O \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \cancel{2x + 2y = 0} \\ 2x + 2y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Para resolverlo hacemos la $x = t$, por ser la parte que no intervino en el menor de orden 2 diferente de cero que permitió decidir que el rango de A era 2, y quedan las soluciones:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

---

3. Dados los puntos $P(1,-2,2), Q(-4,0,1), R(-3,1,2), S(0,-3,0)$:

a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación continua de la recta r que pasa por $P\ y\ Q$
b) (0,75 puntos). Hallar la recta s que pasa por $R\ y\ S$ como intersección de dos planos
c) (0,75 puntos). Hallar la ecuación general del plano π que contiene a S y es paralelo a r y a s.

SOLUCIÓN:

a) La recta r pasa por $P(1,-2,2), Q(-4,0,1)$
Por tanto, podemos coger cualquiera de los dos puntos para sacar su ecuación y el vector director será:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (-4-1, 0+2, 1-2) = (-5,2,-1)$$

Así, la ecuación continua de r cogiendo el punto P es:

Vector director: 0,25
Ecuación: 0,25

$$(r) \quad \frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

b) La recta s pasa por $R(-3,1,2), S(0,-3,0)$
Por tanto, podemos coger cualquiera de los dos puntos para sacar su ecuación y el vector director será:

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{RS} = (0+3, -3-1, 0-2) = (3,-4,-2)$$

Así, la ecuación continua de s cogiendo el punto S es:

Vector director: 0,25
Planteamiento: 0,25
Solución: 0,25

$$(s) \quad \frac{x}{3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{-2}$$

Igualando dos a dos, quitando denominadores y despejando se obtienen sus ecuaciones como intersección de dos planos

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+3}{-4} \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{z}{-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x = 3y+9 \\ -2x = 3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 9 = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

c) Utilizando el punto $S(0,-3,0)$ y los vectores $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (-5,2,-1)$ y $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{RS} = (3,-4,-2)$ podemos hallar la ecuación de pi desarrollando el siguiente determinante:

Planteamiento: 0,35
Solución: 0,4

$$(\pi) \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z \\ -5 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies -8x - 13y + 14z - 39 = 0$$

---

4. (2 puntos) En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60%, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75%, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50%.

Si un cliente compra un artículo de cada clase —y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno— debe pagar 26 euros.

Si compra dos artículos de cada clase pagará 35.20 euros.

Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B.

Determínese el precio de cada artículo.

SOLUCIÓN:

Resumamos los datos del enunciado en una tabla:

Planteamiento: 1
Cálculos: 1

ARTÍCULO	Precio 1ª unidad	Precio 2ª unidad
A	x	0,4x
B	y	0,25y
C	z	0,5z
TOTAL	26	35,20-26=9,20

De la tabla se deducen fácilmente las dos primeras ecuaciones. La tercera ecuación sale de traducir la última condición.

$$\begin{cases} x+y+z=26 \\ 0{,}4x+0{,}25y+0{,}5z=9{,}20 \\ 1{,}25y+z=y+1{,}5z \end{cases} \xrightarrow[4F_3]{100\cdot F_2} \begin{cases} x+y+z=26 \\ 40x+25y+50z=920 \\ 5y+4z=4y+6z \end{cases} \xrightarrow[F_3:5]{F_2:5} \begin{cases} x+y+z=26 \\ 8x+5y+10z=184 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución y reducción y se obtiene la solución: $\begin{cases} x=8 \\ y=12 \\ z=6 \end{cases}$

Es decir, el artículo A cuesta 8 €, el B cuesta 12€ y el C cuesta 6€