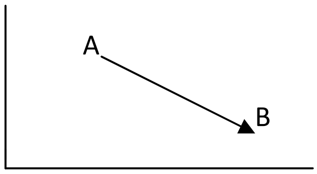
VECTORES EN EL PLANO

Vector Fijo

Un vector fijo es un segmento orientado. El vector $\vec{AB}$ es un vector de origen en el punto A y extremo en B.Conocemos su origen A y su final B. Se denota por $\overrightarrow{AB}$,



Los elementos que definen un vector son tres:

Módulo: Longitud del segmento $\overline{AB}$. Y se escribe $\left|\vec{AB}\right|$

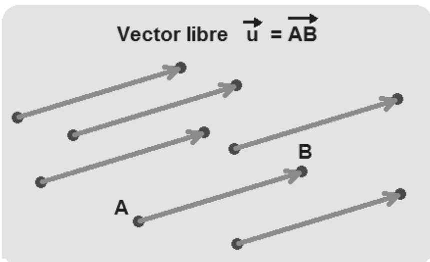
Dirección : Es la recta sobre la que se encuentra el vector.
Sentido: Cada dirección tiene dos sentidos. Diremos que dos vectores fijos tienen igual sentido (teniendo igual dirección) si al unir los orígenes de los vectores ambos están en el mismo semiplano.

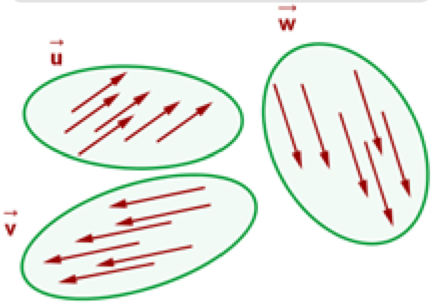
<u>Vectores equivalentes</u>: Son aquellos con igual módulo, dirección y sentido.

VECTOR LIBRE

<u>Vector libre</u>: Es el conjunto de vectores que son equivalentes entre sí.

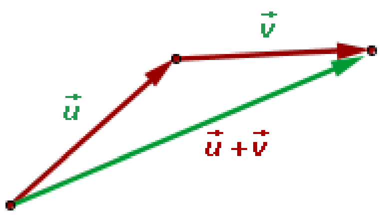
Un vector LIBRE representa un conjunto de vectores fijos con igual módulo, dirección y sentido.





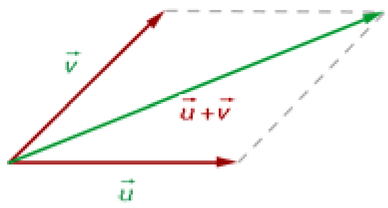
Representación de tres vectores libres

Operaciones con Vectores libres



Suma de vectores
Para sumar dos vectores libres $\overline{u}$ y $\overline{v}$ se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.

Regla del paralelogramo

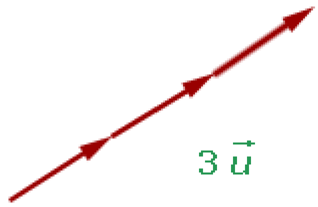


Se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores.

Producto de un número por un vector

El producto de un número k por un vector $\overline{u}$ es otro vector:

- De **igual dirección** que el vector $\overline{u}$.
- Del **mismo sentido** que el vector $\overline{u}$ **si k es positivo**.
- De **sentido contrario** del vector $\overline{u}$ **si k es negativo**.
- De **módulo** $|\,k\,||\,\overline{u}\,|$



Combinación lineal de vectores

Una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$; $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ es una expresión de la forma:

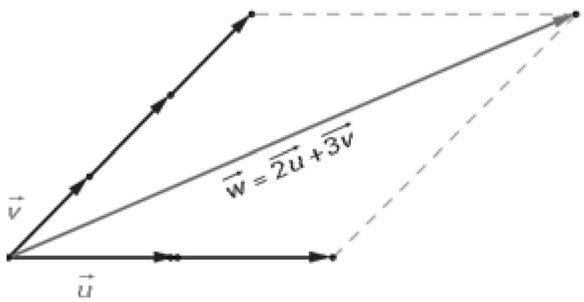
$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ con $a_1, a_2; a_3$ números reales.

Se dice que $\vec{u}$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$; $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ si $\vec{u}$ se puede escribir de la forma $u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$

$a_1, a_2; a_3$ son números reales

Ejemplo Una **combinación lineal** de dos o más vectores es el **vector** que se obtiene al **sumar** esos **vectores multiplicados** por sendos **escalares**.

$u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots. + a_nv_n$



En este ejemplo w es una combinación lineal de u y v

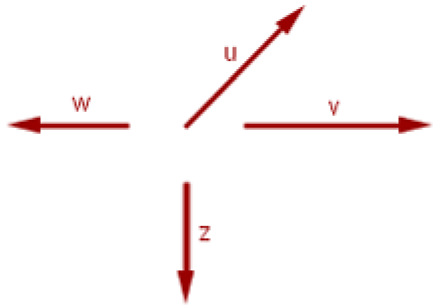
Vectores linealmente dependientes

Un conjunto de vectores se dice que es **l.d.** cuando uno cualquiera se puede escribir como combinación lineal del resto.

Otra forma de definirlo es: Un conjunto de vectores se dice que l. d. cuando podemos escribir el vector $\vec{0}$ como combinación lineal de ellos sin que los coeficientes sean todos ceros

Vectores linealmente independientes

Un conjunto de vectores se dice que es **l.i.** cuando ninguno se puede escribir como combinación lineal del resto. O de otra forma, si el vector cero $\vec{0}$ se puede expresar como combinación lineal de ellos todos los coeficientes son 0. Varios **vectores libres** son **linealmente dependientes** si ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros. O bien



Si $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$ => **$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$**

Consecuencia de las definiciones anteriores:

El conjunto $\left\{ \vec{0}\ \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}; ..... \right\}$ es siempre l. dependiente ya que siempre podremos escribir el vector $\vec{0}$ como combinación lineal de los demás $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} + ...$

En el plano

- Gráficamente dos vectores son l.d. si son dos vectores de igual dirección.
- Gráficamente dos vectores son l.i. si son dos vectores de distinta dirección.
- Dados dos vectores l.i., si considero un tercero éste siempre se puede expresar como combinación lineal de los otros dos.
- Dados dos vectores l.i. en el plano forman una base.

BASE DE VECTORES.

Una base de vectores del plano está formada por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que son independientes y que a partir de combinaciones lineales de ellos, obtenemos todos los demás vectores del plano. Se denota de la siguiente forma:

B=$\{\vec{u}, \vec{v}\}$

Y si $\vec{z}$ es otro vector del plano, entonces $\vec{z} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$.

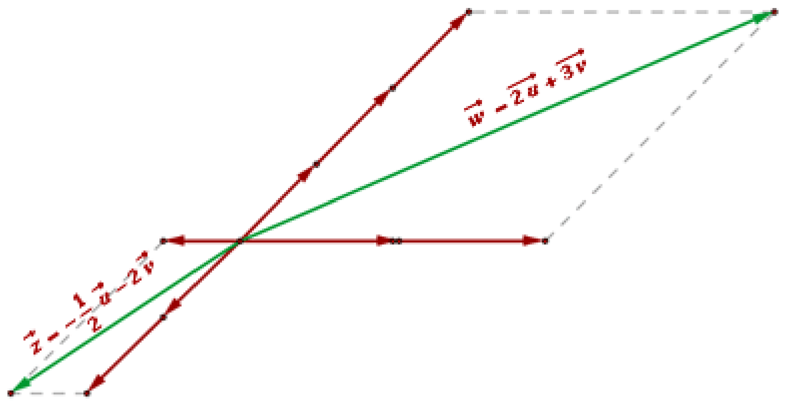
A partir de ahora, decir que todo vector puede venir expresado de dos formas distinta:

- A) en función de los vectores de una base: $\vec{z} = a.\vec{u} + b.\vec{v}$

- B) en coordenadas: $z = (a,b)$

Coordenadas de un vector respecto una base

Si tengo la base $\left\{\vec{u};\vec{v}\right\}$ a los escalares que aparecen al escribir dicho vector como combinación lineal de los elementos de la base.
Estas coordenadas serán distintas respecto de cada base.



- $x = a\vec{u} + b\vec{v}$ =>Las **coordenadas del vector** respecto a la **base** son: $\vec{x} = (a,b)$

Base Ortonormal:

Una base B=$\{\vec{i}, \vec{j}\}$ se dice que es ortonormal si es ortogonal y los vectores tienen longitud 1, es decir, $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1$ y vectores perpendiculares.

OPERACIONES.

Sean $\vec{u}$=(a,b) y $\vec{v}$=(c,d) dos vectores libres y sea α un número real, se definen las siguientes operaciones:

SUMA

1.- (a,b)$\pm$ (c,d) = (a$\pm c, b \pm d)$

MULTIPLICACION POR ESCALAR

2.- $\alpha.(\mathrm{a},\mathrm{b}) = (\alpha.\mathrm{a}, \alpha.\mathrm{b})$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores libres, cuyas coordenadas en una base ortonormal son $\vec{u} = (x_1, y_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2)$ (se llama producto escalar de ambos vectores al valor de la siguiente expresión:

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\alpha \qquad \text{con } \alpha = áng(\vec{u},\vec{v})$$

Si tengo una base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ entonces si hacemos los productos escalares de los vectores que forman esa base:

$\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}|.|\vec{i}|.\cos\alpha = 1\cdot 1\cdot \cos 0 = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}|.|\vec{j}|.\cos 90 = 1\cdot 1\cdot \cos 90 = 0$

$\vec{j}.\vec{j} = |\vec{j}|.|\vec{j}|.\cos\alpha = 1\cdot 1\cdot \cos 0 = 1$

$\vec{j}.\vec{i} = |\vec{j}|.|\vec{i}|.\cos\alpha = 1\cdot 1\cdot \cos(-90) = 1$

Propiedades del producto escalar

1. Conmutativa: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\alpha = \vec{v}.\vec{u}$

2. Distributiva respecto a la suma vectorial: $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$

3. Asociatividad respecto al producto por un escalar k: $k(\vec{v}\vec{w}) = (k.\vec{v})\vec{w}$

Por lo tanto si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores libres, cuyas coordenadas en una base ortonormal son $\vec{u} = (x_1, y_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2)$ el producto escalar de ambos vectores al valor de la siguiente expresión:

$$\vec{u}.\vec{v} = (x_1 i + y_1 j)(x_2 i + y_2 j) = x_1x_2\vec{i}\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + x_2y_2\vec{j}\vec{j} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = x_1 \,.\, x_2 + y_1 \,.\, y_2}$$

Ejemplo

$\vec{v} = (2;3)$ y $\vec{w} = (4;-5)$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = 2\,.\,4 + 3\,.\,(-5) = -7$

Ejemplo Calcula el producto escalar $\vec{v}\cdot\vec{w}$ con los datos que se indican en cada caso.

a. $\vec{v} = (1;5)$ $\quad |\vec{w}| = \sqrt{6}$ $\quad \hat{\alpha} = 45^\circ$

b. $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 3$ $\quad \hat{\alpha} = 210^\circ$

c. $\vec{v} = (4;-1)$ $\quad \vec{w} = (1;4)$

d. $|\vec{v}| = 4\,.\,|\vec{w}|$ $\quad \hat{\alpha} = 90^\circ$

MÓDULO DE UN VECTOR.

Sea $\vec{u}$ un vector libre, llamamos módulo del mismo a su longitud, y lo denotamos por $|\vec{u}|$

Si las coordenadas de $\vec{u}$ en una base ortonormal son (x,y) entonces $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

VECTORES UNITARIOS.

Se llaman vectores unitarios a aquellos vectores que su $|\vec{u}| = 1$

NORMALIZACIÓN DE UN VECTOR.

Sea $\vec{u}$ un vector no nulo y no unitario. Normalizar dicho vector es construir otro, a partir de él, que tenga la misma dirección , sentido y que su módulo sea 1. Dicho vector se construye de la siguiente forma:

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

VECTORES ORTOGONALES.

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se dicen que son ortogonales si su producto escalar es cero: $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$$\boxed{\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0}$$

Demostración

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta = 0$

y

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \Rightarrow |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta = 0 \Rightarrow$ algún vector es nulo

ó

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$

Ángulo entre dos vectores

Se define como el menor ángulo positivo determinado por ambos al estar aplicados en un origen común.

$$\cos\hat{\alpha} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \,.\, |\vec{w}|}$$

Base Ortogonal

Una base B={$\vec{u}$, $\vec{v}$} se dice que es ortogonal, si sus vectores lo son, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Base Normada

Una base B={$\vec{u}, \vec{v}$} se dice que es normada si los vectores que la forman son unitarios, es decir, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$.

Base Ortonormal:

Una base B={$\vec{u}, \vec{v}$} se dice que es ortonormal si es ortogonal y normada a la vez, es decir, $\vec{u}.\vec{v} = 0$, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$.

Todo vector que venga expresado en función de los vectores de una base ortonormal, puede expresarse mediante sus coordenadas.

Dado el vector $\vec{u}$ (a,b); las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la base canónica serán siempre (a,b)

OPERACIONES CON VECTORES EN AMBAS EXPRESIONES.

Sea B={$\vec{u}, \vec{v}$} una base de vectores. En ella consideramos los vectores

$$\vec{x} = a.\vec{u} + b.\vec{v} \qquad \vec{y} = c.\vec{u} + d.\vec{v}$$

<u>Base no ortonormal:</u>

$$\vec{x}.\vec{y} = \left(a.\vec{u} + b.\vec{v}\right)\left(c.\vec{u} + d.\vec{v}\right) = a.c.\left|\vec{u}\right|^2 + a.d.\vec{u}.\vec{v} + b.c.\vec{u}.\vec{v} + b.d\left|\vec{v}\right|^2$$

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{\left(a.\vec{u} + b.\vec{v}\right)\left(a.\vec{u} + b.\vec{v}\right)}$$

<u>Base ortonormal:</u>

$$\vec{x}.\vec{y} = (a,b).(c,d) = a.c + b.d$$

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

RELACIÓN DE PROBLEMAS TIPO:

1. 1.- Calcular el valor de m y n para que los vectores $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, m\right)$ y $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, n\right)$ sean unitarios.
2. Hallar el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (1, m)$ y $\vec{v} = (3,4)$ sean ortogonales.
3. Dados los vectores $\vec{x} = (2,3)$ e $\vec{y} = (-1,4)$,
   A)Normalizarlos.
   B) Hallar el ángulo que forman dichos vectores.
   C) Hallar un vector unitario y ortogonal al $\vec{x}$.
4. Se sabe que $\vec{u}.\vec{v} = 10$, $\vec{u} = (a,3)$ y | $\vec{v}$ |=4 y ang($\vec{u}, \vec{v}$) =60º. Hallar el valor de a
5. 5.-Sea B={$\vec{u}, \vec{v}$} una base ortonormal. En ella consideramos los vectores $\vec{x} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{y} = -\vec{u} + k\vec{v}$.
   Hallar k de forma que los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean ortogonales.
   Normalizar $\vec{x}$.
   Hallar un vector unitario y ortogonal al $\vec{x}$.
6. Sea B={$\vec{u}, \vec{v}$} una base ortogonal con | $\vec{u}$ |=1, | $\vec{v}$ |=2. Sean los mismos vectores del ejercicio anterior, hallar los mismos apartados.
7. Idem, pero B={$\vec{u}, \vec{v}$} una base normada y áng($\vec{u}, \vec{v}$)=60º.
8. Idem, pero B={$\vec{u}, \vec{v}$} una base con | $\vec{u}$ |=1, | $\vec{v}$ |=2 y áng(u, v)=60º
9. A un vector libre (-5,7) pertenece un vector fijo de origen en punto A(3,-3). Determina el extremo y comprueba gráficamente el resultado.
10. El vector fijo AB tiene la misma dirección que el vector fijo CD, sus sentidos son opuesto y la longitud de CD es tres veces la de AB. Determina las coordenadas de D sabiendo que A(3,-2), B(6,1) y C(5,5). Haz una comprobación gráfica del resultado.
11. Sean U=$\left\{\vec{u}_1; \vec{u}_2\right\}$ y V=$\left\{\vec{v}_1; \vec{v}_2\right\}$ dos bases en el plano. Sabemos, además que $\vec{u}_1 = -3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$; y $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$. ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{v} = \frac{5}{3}\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2$ respecto de la base V? ¿ Cuáles son las componentes del vector $\vec{u} = 3\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2$ respecto de la base U?.
12. ¿Forman base los vectores (3,-2) y (5,-1)?
13. Dibuja los vectores (1,3); (3,2);(4,5);(4,0);(0,4);(3,2);(2,-3);(-5,4). ¿cuáles son perpendiculares entres sí?. Escribe el primero como combinación lineal del los dos siguientes.
14. Sabemos que 3 $\vec{u} - 2\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$
15. ¿Puede afirmarse que $\vec{u}$ depende linealmente de $\vec{v}$ y $\vec{w}$?
16. ¿Puede afirmarse que $\vec{w}$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

Ejercicios con solución

1. Un vector fijo tiene su origen en el punto A(2, –1) y es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$ (–1, 4). Determina las coordenadas de su extremo y su módulo. [Sol] B(1, 3); $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{17}$.

2. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos A(1, –3), B(2, 2) y C(–3, 0). Calcula las coordenadas del cuarto vértice. **[Sol]** D(-4, -5)

3. Halla el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $|\vec{u}| = 2,\ |\vec{v}| = \frac{1}{4};\ (\vec{u},\vec{v}) = 60^\circ$ b) $|\vec{u}| = 3,\ |\vec{v}| = (2,-3);\ (\vec{u},\vec{v}) = 45^\circ$

c) $\vec{u} = \left(3, \frac{1}{2}\right),\ \vec{v} = (-1, 3)$ [Sol] a) $\frac{1}{4}$; b) = $\frac{3\sqrt{26}}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$

4. Dados los vectores $\vec{u}$ (1, –2), $\vec{v}$ (3, 1) y $\vec{w}$ (2, 0),

a) calcula las coordenadas del vector $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$,

b) expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$,

c) calcula los ángulos que forman dos a dos,

d) halla un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$,

[Sol] a) $\left(-\frac{1}{3}, -5\right)$; b) $\vec{w} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{4}{7}\vec{v}$; c) $(\vec{u},\vec{v}) =$ 81º 52´ 12´´; $(\vec{u},\vec{v}) =$ 63º 26´ 6´´; $(\vec{v},\vec{w}) =$ 18º 26´ 6´´; d) $\vec{x_1} =$ (2, -4) y $\vec{x_2} =$ (-2, 4).

5. Si $\vec{u}$ (2, *a*) y $\vec{v}$ (1, -4) determina el valor de *a* para que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares; b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan el mismo módulo,

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 10. [Sol] a) $a = \frac{1}{2}$; b) $a = \pm\sqrt{13}$; c) *a* = –2

6. Sea $\vec{u}$ (3, -2). Calcula:

a) un vector $\vec{x}$ unitario y con la misma dirección que $\vec{u}$,

b) un vector $\vec{z}$ unitario y perpendicular a $\vec{u}$.

[Sol] a) $\vec{x_1} = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\vec{x_2} = \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$; b) $\vec{z_1} = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\vec{z_2} = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$.