

- 1) Conociendo que $\cos \alpha = 1/3$ y que α está en el cuarto cuadrante, hallar, sin usar calculadora, el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale el ángulo. (2 puntos)
- 2) Resolver un triángulo sabiendo que $A=96^\circ$, $a=12$ m y $b=9$ m (2 puntos)
- 3) Demostrar que $\operatorname{tg}(45^\circ+x) - \operatorname{tg}(45^\circ-x) = 2\operatorname{tg} 2x$ (2 puntos)
- 4) Resolver la ecuación $\cos 2x + 5\cos^2 x = 6$ (2 puntos)
- 5) a) Hallar $(-1+i\sqrt{3})^{15}$ (1 punto)
b) Hallar los cinco resultados de $\sqrt[5]{-243}$ (1 punto)

SOLUCIONES

- 1) Conociendo que $\cos \alpha = 1/3$ y que α está en el cuarto cuadrante, hallar, sin usar calculadora, el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale el ángulo. (2 puntos)

$$\text{Como } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \boxed{\sin \alpha} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\sqrt{8}}{3} = \boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}, \text{ donde el signo negativo es por ser del cuarto cuadrante.}$$

$$\text{Por tanto, } \boxed{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{-2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Con lo que: } \boxed{\operatorname{cotg} \alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}; \quad \boxed{\sec \alpha} = \frac{1}{1/3} = \boxed{3};$$
$$\boxed{\operatorname{cosec} \alpha} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

Como $\cos \alpha = 1/3 \Rightarrow \alpha = 70,53^\circ$. Pero considerando que es del 4º cuadrante, el resultado real es: $\boxed{\alpha} = 360^\circ - 70,53^\circ = \boxed{289,47^\circ = 289^\circ 28' 16''}$.

- 2) Resolver un triángulo sabiendo que $A=96^\circ$, $a=12$ m y $b=9$ m (2 puntos)

Por el T. de los senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{9 \sin 96^\circ}{12} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{B = 48,24^\circ} \text{ ó } B = 180^\circ - 48,24^\circ = 131,76^\circ.$$

Pero esta segunda solución no es válida, porque $A + B > 180^\circ$, con lo que no puede completarse el triángulo.

Entonces: $\boxed{C} = 180^\circ - A - B = \boxed{35,76^\circ}$. Y además:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \boxed{c} = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{12 \sin 35,76^\circ}{\sin 96^\circ} = \boxed{7,05 \text{ m}}$$

- 3) Demostrar que $\operatorname{tg}(45^\circ + x) - \operatorname{tg}(45^\circ - x) = 2 \operatorname{tg} 2x$ (2 puntos)

$$\boxed{\operatorname{tg}(45^\circ + x) - \operatorname{tg}(45^\circ - x)} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} =$$
$$= \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^2 - (1 - \operatorname{tg} x)^2}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} = \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - (1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x)}{1^2 - \operatorname{tg}^2 x} =$$
$$= \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - 1 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \boxed{2 \operatorname{tg} 2x}$$

- 4) Resolver la ecuación $\cos 2x + 5 \cos^2 x = 6$ (2 puntos)

$$\cos 2x + 5 \cos^2 x = 6 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 5 \cos^2 x = 6 \Rightarrow 6 \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 6$$

$$\Rightarrow 7 \cos^2 x - 1 = 6 \Rightarrow 7 \cos^2 x = 7 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1.$$

En consecuencia:

- Si $\cos x = -1 \Rightarrow \boxed{x = 180^\circ + 360^\circ k, \forall k \in \mathbb{Z}}$
- Si $\cos x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0^\circ + 360^\circ k, \forall k \in \mathbb{Z}}$

5) a) Hallar $(-1+i\sqrt{3})^{15}$

(1 punto)

Lo primero es pasar la base de la potencia a forma polar, para poder operar fácilmente.

- El módulo será $\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.
- Como $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{-1} = -60^\circ$, y el complejo está en el segundo cuadrante (pues su parte real es negativa, y la parte imaginaria positiva) $\Rightarrow \alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Por tanto, $\boxed{(-1+i\sqrt{3})^{15}} = (2_{120^\circ})^{15} = (2^{15})_{15 \cdot 120^\circ} = 32.768_{1.800^\circ} = 32.768_{0^\circ} = \boxed{32.768}$

Ya que $1.800^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 0^\circ$.

b) Hallar los cinco resultados de $\sqrt[5]{-243}$

(1 punto)

Para empezar, es imprescindible poner el radicando en polares. Lo que es fácil: $-243 = 243_{180^\circ}$ pues el número está en la parte negativa del eje real.

Entonces, las cinco raíces tendrán como modulo $\sqrt[5]{243} = 3$. Sus argumentos serán:

por lo que los resultados finales son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{180}{5} = 36^\circ & \Rightarrow \boxed{z_1 = 3_{36^\circ}} \\ \alpha_2 &= \frac{180}{5} + \frac{360^\circ}{5} \cdot 1 = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ & \Rightarrow \boxed{z_2 = 3_{108^\circ}} \\ \alpha_3 &= \frac{180}{5} + \frac{360^\circ}{5} \cdot 2 = 36^\circ + 72^\circ \cdot 2 = 180^\circ & \Rightarrow \boxed{z_3 = 3_{180^\circ} = -3} \\ \alpha_4 &= \frac{180}{5} + \frac{360^\circ}{5} \cdot 3 = 36^\circ + 72^\circ \cdot 3 = 252^\circ & \Rightarrow \boxed{z_4 = 3_{252^\circ}} \\ \alpha_5 &= \frac{180}{5} + \frac{360^\circ}{5} \cdot 4 = 36^\circ + 72^\circ \cdot 4 = 324^\circ & \Rightarrow \boxed{z_5 = 3_{324^\circ}} \end{aligned}$$