EXAMEN
NÚMEROS REALES. RADICALES Y LOGARITMOS

1. Halla para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones, exprésalos en los casos en que sea posible como intervalos o unión de los mismos:

   $a)\ |x-2| \leq 5$ $\qquad b)\ |x+4| = \dfrac{5}{2}$ $\qquad c)\ |x-3| > 2$ (1,5 puntos)

2. Expresa el entorno $E\left(\dfrac{-1}{2};\ \dfrac{5}{2}\right)$ como un intervalo y represéntalo gráficamente:

   (0,5 puntos)

3. Calcula, simplificando al máximo las siguientes expresiones con radicales y expresando en forma de una única raíz.

   $a)\ 2\sqrt{125a^3} - 3a\sqrt{245a} + a\sqrt{80a} - 4\sqrt{500a^3}$

   $b)\ \dfrac{\left(a\cdot\sqrt[5]{a^3}\right)^2\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[5]{a}}}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^7} =$ (1,75 puntos)

4. Expresa en forma de una única potencia:

   $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}}\right):\left(\sqrt[4]{2}\right)^5 =$ (0,75 puntos)

5. Racionaliza, efectúa y simplifica el resultado:

   $a)\ \dfrac{6}{\sqrt[4]{27}} =$ $\qquad b)\ \dfrac{5\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{7}} =$ $\qquad c)\ \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \dfrac{6}{5\sqrt{3}} =$

   (2 puntos)

6. Halla el valor de la siguiente expresión aplicando previamente la definición de logaritmo en cada sumando:

   $$\log_3\frac{1}{81} - \log_8 2 + \log_5\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} =$$

   (0,75 puntos)

7. Sabiendo que *log A=1,23* y *log B=0,15,* calcula el valor de la siguiente expresión, aplicando las propiedades de los logaritmos:

   $$\log\left(\frac{0{,}001\cdot A^3}{\sqrt{10\,B}}\right) =$$

   (1 punto)

8. Aplica las propiedades de los logaritmos para hallar el valor de C:

   $$\log C = 1 + 2\log 6 - log 3$$

   (0,75 puntos)

9. Calcula el valor de x en cada caso: (*redondea el resultado a milésimas*)

   $a)\ \log_x\dfrac{1}{8} = 3$ $\qquad b)\ \log x = -\dfrac{3}{2}$ $\qquad c)\ 3^{5x+4} = 225$ $\qquad d)\ \log_7 265 = x$ (1 punto)

SOLUCIONES

1.- a) $|x-2| \le 5 \Rightarrow -5 \le x-2 \le 5 \Rightarrow -5+2 \le x \le 5+2 \Rightarrow -3 \le x \le 7$.

$[-3, 7]$

b) $|x+4| = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+4 = 5/2 \Rightarrow x = -4+\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \\ x+4 = -5/2 \Rightarrow x = -4-\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{-13}{2} \end{cases}$

No es un intervalo. Son dos puntos aislados.

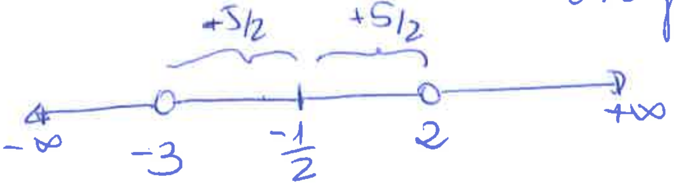
c) $|x-3| > 2 \Rightarrow \begin{cases} x-3 > 2 \Rightarrow x > 5 \\ x-3 < -2 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$ $S = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$

2.- $E\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ = Entorno de centro $-\frac{1}{2}$ y radio $\frac{5}{2}$.

Sus extremos serán: E. inferior: $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$

E. superior: $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$

$\boxed{I = (-3, 2)}$



3.- a) $2\sqrt{125a^3} - 3a\sqrt{245a} + a\sqrt{80a} - 4\sqrt{500a^3} =$

$= 2\sqrt{5^3a^3} - 3a\sqrt{7^2 \cdot 5a} + a\sqrt{2^4 5a} - 4\sqrt{5 \cdot 10^2 a^3} =$

$= 2 \cdot 5 \cdot a\sqrt{5a} - 3 \cdot a \cdot 7 \cdot \sqrt{5a} + \cancel{8} \cdot 2^2 a\sqrt{5a} - 4 \cdot 10a\sqrt{5a} =$

$= 10a\sqrt{5a} - 21a\sqrt{5a} + \cancel{20} 4a\sqrt{5a} - 40a\sqrt{5a} =$

$= \underline{-47a\sqrt{5a}}$

b) $\dfrac{\left(a\sqrt[5]{a^3}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^7} = \dfrac{a^2\sqrt[5]{a^6} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{10}a}}}{\sqrt[3]{a^7}} =$

$= \dfrac{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^6} \cdot \sqrt[15]{a^{11}}}{a^2\sqrt[3]{a}} = \dfrac{\sqrt[15]{a^{18}} \cdot \sqrt[15]{a^{11}}}{\sqrt[15]{a^5}} = \sqrt[15]{a^{18+11-5}} = \sqrt[15]{a^{24}}$

$= \underline{\sqrt[5]{a^8}} = \boxed{a\sqrt[5]{a^3}}$

4.- $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}} \cdot \sqrt{2\sqrt{2}}\right) : \left(\sqrt[4]{2}\right)^5 = \left[\left(2^2\right)^{1/3}\right]^{1/4} \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1/4} : 2^{5/4} =$

$= 2^{1/6} \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1/4} : 2^{5/4} = 2^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}$

$= 2^{-4/12} = 2^{-1/3}$

5.- a) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{27}} = \dfrac{6}{\sqrt[4]{3^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \dfrac{6\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \dfrac{6\sqrt[4]{3}}{3} = 2\sqrt[4]{3}$

b) $\dfrac{5\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}(3\sqrt{2}+2\sqrt{7})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{7})(3\sqrt{2}+2\sqrt{7})} = \dfrac{15\sqrt{14}+10\cdot\sqrt{7^2}}{9\cdot 2 - 2^2\cdot 7} =$

$= \dfrac{15\sqrt{14}+70}{18-28} = \dfrac{15\sqrt{14}+70}{-10} = \dfrac{5(3\sqrt{14}+14)}{-5\cdot 2} = \boxed{\dfrac{-3\sqrt{14}-14}{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \dfrac{6}{5\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} - \dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$+ \dfrac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{6+2+2\sqrt{12}}{6-2} - \dfrac{6+2-2\sqrt{12}}{6-2} + \dfrac{6\sqrt{3}}{15} =$

$= \dfrac{8+2\cdot\sqrt{2^2\cdot 3}}{4} - \dfrac{8-2\sqrt{2^2\cdot 3}}{4} + \dfrac{2\sqrt{3}}{5} = \dfrac{8+4\sqrt{3}-8+4\sqrt{3}}{4} + \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

$= 2\sqrt{3} + \dfrac{2}{5}\sqrt{3} = \dfrac{12\sqrt{3}}{5}$

6.- $\log_3 81 - \log_8 2 + \log_5 \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} = 4 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{24-2+1}{6} = \boxed{\dfrac{23}{6}}$

(a) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

(b) $\log_8 2 = x \Longleftrightarrow 8^x = 2 \Longleftrightarrow 2^{3x} = 2^1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

(c) $\log_5 \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} = \log_5 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \log_5 5^{1/6} = \dfrac{1}{6}$

7.- $\log A = 1'23$; $\log B = 0'15$

$\log\left(\dfrac{0'001\cdot A^3}{\sqrt{10B}}\right) = \log(0'001\cdot A^3) - \log\sqrt{10B} =$

$= \log 0'001 + 3\log A - \dfrac{1}{2}(\log 10 + \log B) =$

$= \log 10^{-3} + 3\cdot 1'23 - \dfrac{1}{2}(1+0'15) = -3 + 3'69 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{0'15}{2} = 0'115$

8.- $\log C = 1 + 2\log 6 - \log 3 \Rightarrow \log C = \log \underbrace{\dfrac{10\cdot 6^2}{3}}_{120} \Rightarrow \boxed{C = 120}$

9.- a) $\log_x \dfrac{1}{8} = 3 \Rightarrow x^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{1/8} = 1/2$.

b) $\log x = -3/2 \Rightarrow x = 10^{-3/2} = \sqrt{10^{-3}} = 0'032$.

c) $3^{5x+4} = 225 \Rightarrow (5x+4)\log 3 = \log 225 \Rightarrow x = \dfrac{\frac{\log 225}{\log 3} - 4}{5} = 0'186$

d) $\log_7 265 = \dfrac{\log 265}{\log 7} = 2'867$.