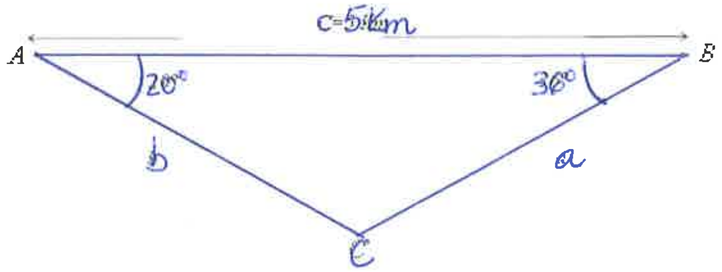
EXAMEN DE TRIGONOMETRÍA

1. Resuelve los siguiente triángulos y calcula en cada caso su área:
   $a)\ a = 11\ cm \qquad b = 7\ cm \qquad C = 36º.$

   $b)\ a = 15\ cm \qquad b = 9\ cm \qquad \hat{A} = 120º$

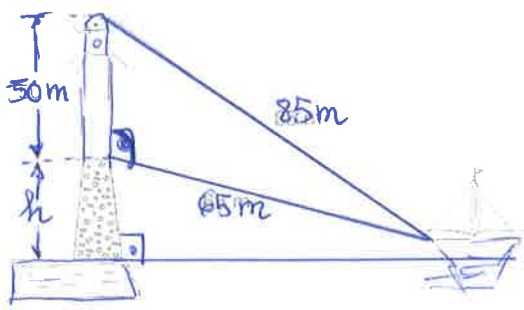
(2,5 puntos)

2. Dos marineros que se encuentran en dos barcos están investigando el fondo marino. Ambos detectan con el sonar la presencia de un barco hundido. Los dos marineros se encuentran separados rectilíneamente una distancia de 5 km. Si el primero lo detecta con un ángulo de 20 ° y el segundo con un ángulo de 36°, calcula:
   a) La distancia a la que se encuentra el barco de cada uno de los marineros.
   b) La profundidad a la que se encuentra el barco.



(1,5 puntos)

3. En la figura aparece dibujado un faro de 50 m de altura situado sobre un promontorio. Las respectivas distancias del extremo superior e inferior del faro a un barco son de 85 y 65 metros. Halla la altura del promontorio.



(1 punto)

4. Sabiendo que $sen\ \alpha = \frac{-3}{5}$ y $\cos\alpha < 0$, calcula:

   $a) \cos\ (\pi + \alpha) \qquad b)\ sen\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad c)\ tg\ \frac{\alpha}{2} \qquad d)\ tg\ (\pi - \alpha)$

(1 punto)

5. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

   $a)\ 2 \cdot senx\ \cdot cos^2x - 6 \cdot sen^3x = 0$

   $b)\ \sqrt{3} \cdot sen\ (\pi + x) = 2 \cdot cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

(2 puntos)

6. Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\cos x + sen\, x}{\cos x - sen\, x} \cdot \cos 2x = 1 + sen\, 2x$$

(1 punto)

7. Utiliza las fórmulas que transforman sumas en productos para encontrar la solución de la expresión siguiente:

$$\frac{sen\, \frac{11\pi}{15} + sen\, \frac{4\pi}{15}}{\cos \frac{37\,\pi}{30} + \cos \frac{23\,\pi}{30}} =$$

(1 punto)

6.- $\frac{\cos x + \text{sen}\, x}{\cos x - \text{sen}\, x} \cdot (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = \frac{(\cos x + \text{sen}\, x) \cdot (\cos x + \text{sen}\, x)\cancel{(\cos x - \text{sen}\, x)}}{\cancel{(\cos x - \text{sen}\, x)}} =$

$= (\cos x + \text{sen}\, x)^2 = \underbrace{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}_{1} + \underbrace{2 \text{sen}\, x \cdot \cos x}_{\text{sen}\, 2x} = \underline{1 + \text{sen}\, 2x}$ c.q.d

7.- $\frac{\text{sen}\, 132^\circ + \text{sen}\, 48^\circ}{\cos 222^\circ + \cos 138^\circ} = \frac{2\, \text{sen}\left(\frac{132^\circ + 48^\circ}{2}\right) \cos\left(\frac{132^\circ - 48^\circ}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{222^\circ + 138^\circ}{2}\right) \cos\left(\frac{222^\circ - 138^\circ}{2}\right)} =$

$= \frac{\cancel{2}\, \text{sen}\, 90^\circ \cdot \cancel{\cos 42^\circ}}{\cancel{2} \cos 180^\circ \cdot \cancel{\cos 42^\circ}} = \frac{1}{-1} = -1$

1.-

a) $a = 11\,cm$ $\quad b = 7\,cm$ $\quad \hat{C} = 36^\circ$

Usamos el teorema del coseno para calcular c:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\hat{C}$

$c^2 = 11^2 + 7^2 - 2\cdot 11\cdot 7\cdot\cos 36^\circ \Rightarrow \boxed{c = 6'74\,cm}$

Calculemos el ángulo $\hat{B}$ usando el teorema de los senos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b\cdot\operatorname{sen}\hat{C}}{c} = \frac{7\cdot\operatorname{sen}36^\circ}{6'74} = 0'61$$

$\hat{B} = \operatorname{arc\,sen}(0'61) = \begin{cases} 37'62^\circ \\ 142'38^\circ \end{cases}$ $\rightarrow$ No puede ser válida porque esto nos llevaría a obtener un ángulo todavía mayor para $\hat{A}$ (puesto que $a > b$) y ~~no~~ no puede haber en un triángulo dos triángulos obtusos.

Luego $\underline{\hat{B} = 37'62^\circ}$

y con ello

$\underline{\hat{A} = 106'38^\circ}$

$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}36^\circ = 22'63\,cm^2}$

b) $a = 15\,cm$ $\quad b = 9\,cm$ $\quad \hat{A} = 120^\circ$

Usemos el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{9\cdot\operatorname{sen}120^\circ}{15} = 0'5196$$

$\hat{B} = \begin{cases} \boxed{31'31^\circ} \\ 148'69^\circ \end{cases}$ (éste no es posible porque $\hat{B}$ debe ser un ángulo agudo)

$\underline{\hat{C}} = 180^\circ - (31'31^\circ + 120^\circ) = \boxed{28'69^\circ}$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}28'69^\circ} = \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Rightarrow c = \frac{15\operatorname{sen}28'69^\circ}{\operatorname{sen}120^\circ} = 8'32\,cm.$$

$\boxed{c = 8'32\,cm}$

$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}\,a\cdot b\cdot\operatorname{sen}28'69^\circ = 32'4\,cm^2}$

2.- El ángulo en C sería: $\hat{C} = 180^\circ - (20^\circ + 36^\circ) = 124^\circ$.

a) Se nos piden las distancias $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{5}{\operatorname{sen} 124^\circ} \Rightarrow \boxed{a = 2'06 \text{ km}}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 36^\circ} = \frac{5}{\operatorname{sen} 124^\circ} \Rightarrow \boxed{b = 3'54 \text{ km}}$$

La distancia del barco a A es de 3'54 km y a B de 2'06 km

b)

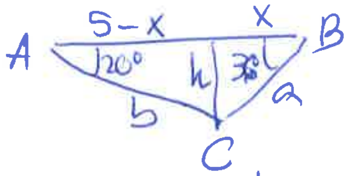
Calculemos h:

$$h = 3'54 \cdot \operatorname{sen} 20^\circ = \boxed{1'21 \text{ km}}$$

El barco está a 1'21 km de profundidad

(*) Otra manera de abordar el problema hubiera sido:

Método de las tangentes:



$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \operatorname{tg} 36^\circ$$

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{h}{5-x} \Rightarrow h = (5-x) \operatorname{tg} 20^\circ$$

Igualando $\Rightarrow x \operatorname{tg} 36^\circ = 5 \operatorname{tg} 20^\circ - x \operatorname{tg} 20^\circ$

$$x(\operatorname{tg} 36^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ) = 5 \operatorname{tg} 20^\circ \Rightarrow x = \frac{5 \operatorname{tg} 20^\circ}{\operatorname{tg} 36^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}$$

$\underline{x = 1'669 \text{ km}}$ $\boxed{h = 1'669 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ = 1'21 \text{ km}}$

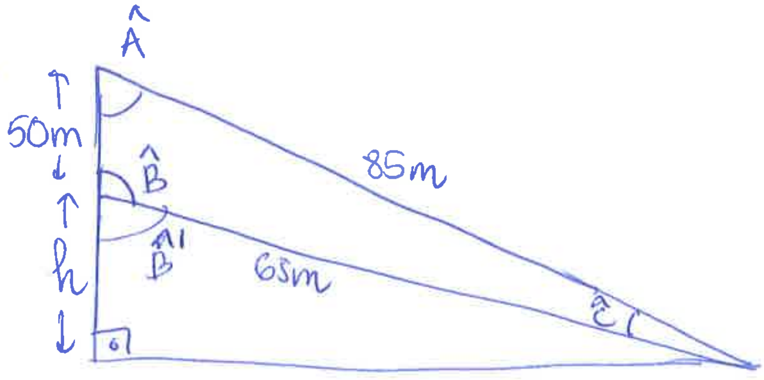
Profundidad.

Después:

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow \underline{a} = \frac{h}{\operatorname{sen} 36^\circ} = \frac{1'21}{\operatorname{sen} 36^\circ} = \underline{2'06 \text{ km}}$$

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{h}{b} \Rightarrow \underline{b} = \frac{h}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \underline{3'54 \text{ km}}$$

3.-



Calculemos el ángulo $\hat{B}$ usando el teorema del coseno:

$$85^2 = 50^2 + 65^2 - 2\cdot 50\cdot 65\cdot \cos\hat{B}$$

$$500 = -6500\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = -0'0769$$

$$\boxed{\hat{B} = 94'41^\circ}$$

Luego $\hat{B}'$, su suplementario, será: $\hat{B}' = 85'59^\circ$.

$$\frac{h}{65} = \cos 85'59^\circ$$

$$\boxed{h = 65\cdot\cos 85'59^\circ = 4'9985 \simeq 5m}$$

4.- $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-3}{5}$ $\quad \cos\alpha < 0$

Entonces α es un ángulo del 3er Cuadrante.

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\boxed{\cos\alpha = -\frac{4}{5}}$$

a) $\cos(\pi+\alpha) = \underbrace{\cos\pi}_{-1}\cos\alpha - \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0}\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha = \frac{4}{5}$

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}\cos\alpha - \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

c) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\sqrt{\frac{1+4/5}{1-4/5}} = -\sqrt{\frac{9/5}{1/5}} = -3$.

d) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3/5}{-4/5} = \boxed{-\frac{3}{4}}$.

$= \frac{\operatorname{tg}\pi - \operatorname{tg}\alpha}{1+\cancel{\operatorname{tg}\pi\operatorname{tg}\alpha}^{0}} = \frac{0-\operatorname{tg}\alpha}{1} = -\operatorname{tg}\alpha$

5.-

a) $2\,\text{sen}\,x \cdot \cos^2 x - 6 \cdot \text{sen}^3 x = 0$

$2\,\text{sen}\,x\left(\cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x\right) = 0 \implies \text{sen}\,x = 0 \implies \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ k \quad k \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{\cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x = 0}$

↳ Desarrollamos $1 - \text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}^2 x = 0$

$1 = 4\,\text{sen}^2 x \implies \text{sen}^2 x = \frac{1}{4}$

$\text{sen}\,x = \pm\frac{1}{2} \implies x = \text{arc sen}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \boxed{\begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \\ 210^\circ + 360^\circ k \\ 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}}$

b) $\sqrt{3}\,\text{sen}(\pi + x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

$\sqrt{3}\left(\underbrace{\cancel{\text{sen}\,\pi}}_{0}\,\cancel{\cos x}^{\,0} + \cos\pi\ \text{sen}\,x\right) = 2 \cdot \frac{1 + \cos x}{2} - 1 =$

$\sqrt{3} \cdot \underbrace{\cos\pi}_{-1} \cdot \text{sen}\,x = 1 + \cos x - 1$

$-\sqrt{3}\,\text{sen}\,x = \cos x \implies \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \qquad \text{tg}\,x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{x = \text{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 150^\circ + 180^\circ k \ ; \ k \in \mathbb{Z}}$