

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

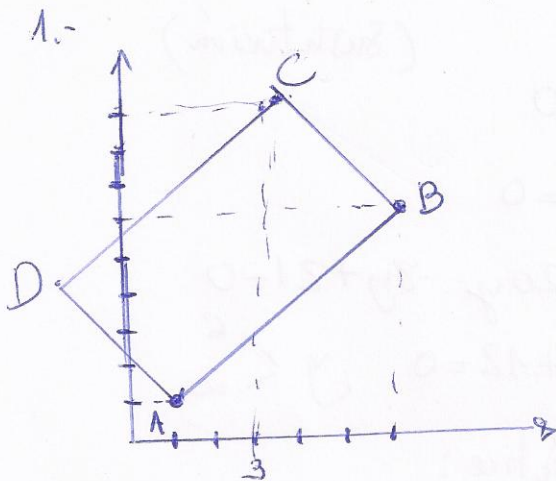
1. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos de coordenadas $(1, 1)$; $(6, 6)$ y $(3, 9)$. Halla las coordenadas del cuarto vértice. ¿Es un rectángulo?
2. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los puntos $(3,0)$ y $(5,4)$. Halla las coordenadas de los otros vértices.
3. Un paralelogramo tiene tres vértices en los puntos $(2,3)$; $(5,1)$ y $(4,0)$. Halla las coordenadas del cuarto vértice.
4. Halla, en todas las formas que conozcas, las ecuaciones de las rectas en cada uno de los siguientes casos:
 - a) Pasa por el punto $A(-2, 2)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (2, -3)$.
 - b) Pasa por los puntos $P(4, 3)$ y $Q(-2, 4)$.
 - c) Pasa por el punto $(3, -1)$ y tiene de pendiente $m=-2$.
 - d) Pasa por el origen de coordenadas y tiene 30° de inclinación.
 - e) Pasa por el punto $(3, -2)$ y es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
5. Dada la recta de ecuación $2x-6y+3=0$, escríbela en forma paramétrica, continua y explícita.
6. Calcula el valor de a para que la recta de ecuación $ax+3y-9=0$:
 - a) Pase por el punto $(3, 1)$.
 - b) Tenga de pendiente $m=-1$.
 - c) Uno de sus vectores de dirección sea $\vec{v} = (6, -4)$.
 - d) Un vector normal a la misma sea $\vec{n} = (-2, -3)$
7. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r: x-2y-4=0$, $s: y=4x-5$ y es paralela a la recta $3x+2y=0$.
8. Las ecuaciones de dos rectas son $r: 3x - 5y + 2 = 0$ y $s: 6x + my = 1$. Halla el valor de m en cada caso para que:
 - a) Las rectas sean paralelas.
 - b) Las rectas sean perpendiculares.
 - c) Formen un ángulo de 45° .
9. Estudia razonadamente la posición relativa de las rectas r y s en cada caso y calcula también el ángulo que forman:
 - a) $r: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$ $s: 5x + y - 2 = 0$
 - b) $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2}$ $s: 3x + 2y - 2 = 0$
 - c) $r: y = 2x - 5$ $s: y = x + 4$
 - d) $r: x - y = 2$ $s: (x, y) = (1, 2) + t(3, 3)$

10. Halla la ecuación de la recta mediatriz del segmento de extremos $A(1, 2)$ y $B(5, 2)$.
11. Dada la recta $r: 3x + 2y + 2 = 0$ y un punto exterior a ella $P(-2, 0)$; calcula:
- La distancia del punto P a la recta r .
 - El punto P' simétrico de P respecto de r .
12. Halla el perímetro y el área del triángulo de vértices $A(5, 3)$; $B(6, 2)$ y $C(3, 1)$.
13. La recta de ecuación $4x - 3y = 54$ es mediatriz del segmento AB . Sabiendo que A tiene de coordenadas $(1, 0)$, halla las coordenadas de B .
14. Halla las ecuaciones de las rectas $3x + 4y - 12 = 0$ que disten de ella 3 unidades de longitud.
15. Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta $4x + 3y - 12 = 0$ que diste 5 unidades del origen de coordenadas.
16. Un triángulo rectángulo en A tiene dos vértices en los puntos $A(1, 3)$ y $C(3, 0)$. Halla el vértice B sabiendo que está situado en la recta $2x + y + 2 = 0$. Halla también el área del triángulo.
17. Un triángulo isósceles tiene por lado desigual el segmento que une los puntos $(1, -3)$ y $(3, 1)$. El otro vértice está situado sobre la recta $x + y + 3 = 0$. Halla las coordenadas de este vértice y el área del triángulo.
18. Un triángulo ABC tiene dos vértices en los puntos $A(1, -3)$ y $B(2, 1)$. El tercer vértice está en la recta $x + y + 3 = 0$, y el área del triángulo es de 6 unidades cuadradas. Halla las coordenadas del tercer vértice.
19. Halla la ecuación del haz de rectas de centro $P(2, -4)$. Encuentra la ecuación de la recta de dicho haz que forma un ángulo de 60° con el eje de abscisas.
20. Halla el simétrico del punto $P(1, 1)$ respecto de la recta $r: \frac{x-4}{2} = y$
21. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 3)$, que forma 45° con la recta de ecuación $2x - y - 9 = 0$. (Hay dos soluciones)
22. Halla la ecuación de la recta paralela a la recta $r: x + 2y - 2 = 0$ que dista de ella $2\sqrt{5}$ unidades. (Hay dos soluciones)
23. Determina qué tipo de triángulo es el triángulo ABC , sabiendo que $A(3, 5)$; $B(6, 9)$ y $C(0, 9)$. Halla su perímetro y su área.

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA

1º BACHILLERATO

(Soluciones)



$$A(1,1) \quad B(6,6) \quad C(3,9)$$

consecutivos.

Entonces, sea D el cuarto vértice. Sup. que $D(x,y)$

Por tanto

$$\vec{BA} = \vec{CD}$$

$$(1,1) - (6,6) = (x,y) - (3,9)$$

$$(-5,-5) = (x-3, y-9)$$

$$-5 = x-3 \Rightarrow x = -2$$

$$-5 = y-9 \Rightarrow y = 4$$

$$\boxed{D(-2,4)}$$

Para determinar si es un rectángulo o no, calculamos el ángulo en $\hat{B}$; es decir, el ángulo que forman los vectores $\vec{BA}$ y $\vec{BC}$:

$$\vec{BA} = (-5, -5)$$

$$\vec{BC} = (-3, 3)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-5) \cdot (-3) + (-5) \cdot 3 = 15 - 15 = 0$$

Por tanto, ambos vectores son $\perp$.

El ángulo en $\hat{B} = 90^\circ$ y por tratarse de un paralelogramo es un rectángulo.

2.- $A(3,0)$

$B(5,4)$

El segmento $\overline{AB}$ es el lado del cuadrado.

Sea C el vértice siguiente a B.

$C(x,y)$

Se verifica que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{AB} \perp \vec{BC} \quad (\text{el ángulo es de } 90^\circ) \quad (I) \\ |\vec{AB}| = |\vec{BC}| \quad (\text{los lados son iguales}) \quad (II) \end{array} \right.$$

(I) $\vec{AB} = (2,4)$

$\vec{BC} = (x-5, y-4)$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow 2(x-5) + 4(y-4) = 0$$

$$2x + 4y - 26 = 0$$

$$x + 2y - 13 = 0 \rightarrow \boxed{x = 13 - 2y} \quad (I)$$

(II) $|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$

Igualando seña:

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 - 20 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 21 = 0$$

Resolvamos $\begin{cases} (I) & x = 13 - 2y \\ (II) & x^2 + y^2 - 10x - 8y + 21 = 0 \end{cases}$ (sustitución)

$$(13 - 2y)^2 + y^2 - 10(13 - 2y) - 8y + 21 = 0$$

$$169 + 4y^2 - 52y + y^2 - 130 + 20y - 8y + 21 = 0$$

$$5y^2 - 40y + 60 = 0 \rightarrow y^2 - 8y + 12 = 0 \quad y < 6$$

Hay dos soluciones para el tercer vértice:

E: Si $y = 6 \Rightarrow x = 13 - 2 \cdot 6 = 1 \Rightarrow C = (1, 6)$

C': Si $y = 2 \Rightarrow x = 13 - 2 \cdot 2 = 9 \Rightarrow C' = (9, 2)$

Se pueden formar dos cuadrados. Solo queda calcular el cuarto vértice en cualquier caso:

• Cuadrado ABCD: $D(x, y) \quad / \quad \vec{BA} = \vec{CD} \quad \begin{matrix} x = -1 \\ y = 2 \end{matrix}$

$$(-2, -4) = (x - 1, y - 6)$$

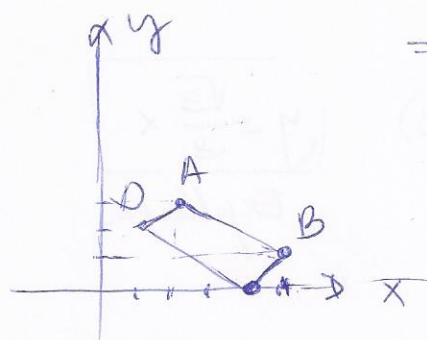
$D(-1, 2)$

• Cuadrado ABC'D': $D'(x, y) \quad / \quad \vec{BA} = \vec{C'D'} \Leftrightarrow (-2, -4) = (x - 9, y - 2)$

$$x = 7 \quad y = -2$$

$D'(7, -2)$

③ A(2,3) B(5,1) C(4,0) Sea D(x,y) el 4º vértice $\Rightarrow$



$$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow (3, -2) = (4-x, -y)$$

$$4-x=3 \rightarrow 1=x \quad D(1,2)$$

$$-2=-y \rightarrow 2=y$$

4.- a) A(-2,2) $\left\{ \begin{array}{l} r: \\ \vec{u}(2,-3) \end{array} \right.$

Vectorial: $(x,y) = (-2,2) + t \cdot (2,-3); t \in \mathbb{R}$

Paramétrica: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Continua:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-3}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} -3x-6=2y-4 \\ r: -3x-2y-2=0 \end{array}$$

Implícita

$\rightarrow$ Explícita

$$3x+2y+2=0$$

$$y = \frac{-3x-2}{2}$$

$$\boxed{r: y = -\frac{3}{2}x - 1}$$

b) P(4,3) y Q(-2,4).

$$\vec{PQ} = (-6,1)$$

* Vectorial: $(x,y) - (4,3) = t(-6,1); t \in \mathbb{R}$

* Paramétrica: $\begin{cases} x = 4 - 6t \\ y = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

• Continua

$$\frac{x-4}{-6} = \frac{y-3}{1}$$

Implícita

$$\begin{array}{l} x-4 = -6y+18 \\ r: x+6y-22=0 \end{array}$$

Explícita

$$\boxed{r: y = -\frac{1}{6}x + \frac{22}{6}}$$

c) P(3,-1) | Punto-pendiente: $y+1 = -2(x-3)$

$$m = -2$$

Explícita:

$$y = -2x + 6 - 1$$

$$\boxed{y = -2x + 5}$$

Implícita: $\boxed{2x+y-5=0}$

Vector de dirección (-1,2) (ó también (1,-2) = (1,m))

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3-t \\ y = -1+2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Vectorial:

$$(x,y) - (3,-1) = t(-1,2) \\ t \in \mathbb{R}$$

d) $O(0,0)$ punto

$$\alpha = 30^\circ \rightarrow m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ecuación punto-pendiente: $y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0)$ $\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x}$
Explícita

$$3y = \sqrt{3}x \Rightarrow \boxed{\sqrt{3}x - 3y = 0} \text{ Implícita}$$

Vector de dirección $\vec{u}(3, \sqrt{3})$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

$$(x, y) = t(3, \sqrt{3}) \quad t \in \mathbb{R} \text{ vectorial.}$$

e) $P(3, -2)$

Paralela a la recta $y = x$ (bisectriz del primer cuadrante)

Pendiente $\boxed{m=1}$

$$y + 2 = 1 \cdot (x - 3) \Rightarrow y + 2 = x - 3 \Rightarrow \boxed{-x + y + 5 = 0} \text{ Implícita.}$$

$$\boxed{y = x - 5} \text{ explícita.}$$

Vector director: $\vec{u}(1, 1)$

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ Paramétricas}$$

$$(x, y) - (3, -2) = t(1, 1) \text{ vectorial}$$

5.- $2x - 6y + 3 = 0$

obtenemos un vector director: $\vec{u}(6, 2)$ o mejor $\boxed{\vec{u}(3, 1)}$

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow -6y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{Punto}(0, 1/2)}$$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ Paramétricas}$$

$$\boxed{\frac{x}{3} = \frac{y - 1/2}{1}}$$

Continua

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{6}x + \frac{3}{6} \\ \boxed{y &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Explícita

Otra forma es obtener primero la explícita despejando $\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}}$

Entonces, llamando $x = t$, obtenemos $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ Paramétricas}$

$$\text{Continua } \boxed{\frac{x}{1} = \frac{y - 1/2}{1/3}}$$

$$6.- \quad ax + 3y - 9 = 0$$

a) (3,1) punto que pasa por esta recta. Deberá cumplir la ecuación:
 $a \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 9 = 0 \Rightarrow 3a = 9 - 3 \quad \boxed{a=2} \quad \boxed{2x+3y-9=0}$

b) $m = -1$

$$y = \left(\frac{-a}{m} \right) x + \frac{q}{m}$$

$$-\frac{a}{3} = -1 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

$$\boxed{3x+3y-9=0}$$

c) (6,-4) debe ser directamente proporcional a ~~(3,1)~~ $\Rightarrow$

$$\frac{6}{3} = \frac{-4}{-a} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

d) $\vec{n}(-2,-3)$ vector normal: debe ser directamente proporcional a
 $(a,3) \Rightarrow \frac{-2}{a} = \frac{-3}{3} \Rightarrow \boxed{a=2}$

7.- Calculemos previamente P ; punto de intersección de las

rectas $\begin{cases} r: x-2y-4=0 \\ s: y=4x-5 \end{cases} \quad \text{(Sustitución)} \Rightarrow x-2(4x-5)-4=0$

$$x-8x+10-4=0$$

$$-7x+6=0$$

$$\boxed{x = \frac{6}{7}, y = \frac{-11}{7}}$$

$$y = 4 \cdot \frac{6}{7} - 5 = \frac{24-35}{7} = \frac{-11}{7}$$

$$P\left(\frac{6}{7}, \frac{-11}{7}\right)$$

• Recta que pasa por $P\left(\frac{6}{7}, \frac{-11}{7}\right)$ y es paralela a $3x+2y=0$.

Por paralelismo, la recta que se pide debe tener la forma siguiente:

$$3x+2y+C=0 \quad \text{y como queremos que pase por } P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{6}{7} + 2 \cdot \frac{-11}{7} + C = 0 \Rightarrow \frac{18-22}{7} + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = \frac{4}{7}}$$

$$\text{Recta: } \boxed{3x+2y+\frac{4}{7}=0} \quad \text{o} \quad \boxed{21x+14y+4=0}$$

Otra forma de hallarla es obtener la pendiente m de $3x+2y=0$.

$$y = -\frac{3}{2}x \quad m = -\frac{3}{2} \quad \text{Por paralelismo las pendientes son iguales y con}$$

$$\text{ello: } y + \frac{11}{7} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{6}{7}\right) \Rightarrow y + \frac{11}{7} = -\frac{3x}{2} + \frac{18}{14} \Rightarrow 14y + 22 = -21x + 18$$

$$\boxed{21x+14y+4=0}$$

$$8.- \quad r: 3x - 5y + 2 = 0$$

$$s: 6x + my - 1 = 0$$

$$a) \quad r \parallel s \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-5}{m} \Rightarrow \boxed{m = -10}$$

$$b) \quad r \perp s \Leftrightarrow \vec{n}_r \perp \vec{n}_s \Leftrightarrow (3, -5) \cdot (6, m) = 0 \Rightarrow 18 - 5m = 0$$

$$\boxed{m = \frac{18}{5}}$$

$$c) \quad \text{Formen un ángulo de } 45^\circ \Leftrightarrow (\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 45^\circ$$

~~Es~~ Es más fácil usar la fórmula que relaciona las pendientes de las rectas con la tangente de 45° :

$$\tan 45^\circ = \frac{|m_r - m_s|}{1 + m_r m_s} \Rightarrow 1 = \frac{\left| \frac{3}{5} + \frac{m}{6} \right|}{1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{m}{6}} \Rightarrow \left| 1 - \frac{3m}{30} \right| = \left| \frac{3}{5} + \frac{m}{6} \right|$$

$$m_r = \frac{3}{5}$$

$$m_s = -\frac{m}{6}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{30 - 3m}{30} \right| = \left| \frac{18 + 5m}{30} \right| \Rightarrow |30 - 3m| = |18 + 5m| \Rightarrow \begin{cases} 30 - 3m = -18 - 5m \\ 30 - 3m = 18 + 5m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m = -48 \Rightarrow \boxed{m = -24} \\ 8m = 12 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}} \end{cases}$$

Hay 2 soluciones

$$9.- \quad a) \quad r: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$$

$$s: 5x + y - 2 = 0$$

$$\vec{u}_r (2, -10)$$

$$\vec{u}_s (-1, 5)$$

$\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ son proporcionales. Entonces r y s , o bien son paralelas, o bien son coincidentes. Para determinar la posición tomamos un punto cualquiera de r ; $P(1, -3)$ y vemos si también pertenece a s :

$$5 \cdot 1 + (-3) - 2 = 0 \quad \checkmark$$

por tanto r y s son coincidentes.

El ángulo que forman es 0°

O también:

$$5(2t + 1) + (-10t - 3) - 2 = 0$$

$$10t + 5 - 10t - 3 - 2 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Identidad}$$

Definitas soluciones

ambas rectas son coincidentes.

$$b) \quad r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} \quad s: 3x+2y-2=0$$

$$\vec{u}_r (3,2)$$

$$\vec{u}_s (-2,3)$$

no son proporcionales, luego r y s son secantes.

$$(\widehat{r,s}) \Rightarrow \cos(\widehat{r,s}) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{4+9}} = \frac{0}{13} = 0$$

$(\widehat{r,s}) = 90^\circ$. r y s son perpendiculares

$$c) \quad r: y=2x-5$$

$$s: y=x+4$$

$$m_r = 2$$

$$m_s = 1$$

Al tener pendientes distintas las rectas son secantes.

$$(\widehat{r,s}) \Rightarrow \operatorname{tg}(\widehat{r,s}) = \frac{|m_r - m_s|}{|1 + m_r m_s|} = \frac{|2 - 1|}{|1 + 2 \cdot 1|} = \frac{1}{3}$$

$$(\widehat{r,s}) = \arccos \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\right) =$$

$$d) \quad r: x-y=2$$

$$s: (x,y) = (1,2) + t(3,3) \Rightarrow \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+3t \end{cases}$$

$$(1+3t) - (2+3t) - 2 = 0$$

$$1+3t-2-3t-2=0$$

$$-3=0$$

Equación incompatible

No tiene solución

Por tanto r y s son paralelas

$$(\widehat{r,s}) = 0^\circ$$

10.- Sea r : mediatriz del segmento $\overline{AB}$; siendo $A(1,2)$ y $B(5,2)$.
 r es la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en su punto medio M .

$$M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+2}{2} \right) = (3,2)$$

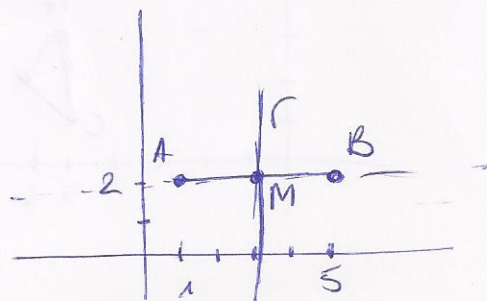
$\overline{AB} \rightarrow$ Recta que pasa por A y B : $\overline{AB} = (4,0)$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{0}$$

$$y-2=0 \Rightarrow \vec{n}(0,1)$$

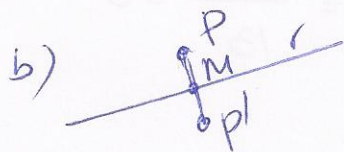
El vector normal $\vec{n}(0,1)$ de la recta $y-2=0$ es un vector de dirección de la mediatriz que pretendemos hallar, luego:

$$\begin{cases} M(3,2) \\ \vec{n}(0,1) \end{cases} \quad \frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow \boxed{x-3=0}$$



11.- $r: 3x+2y+2=0$ $P(-2,0)$

a) $d(P, r) = \frac{|3(-2)+2(0)+2|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$ unidades.



Sea $P'(x,y)$ el punto simétrico a P respecto de la recta r.

Calculamos "s", recta perpendicular a r que pasa por P; esta recta contiene al punto P y al P' .

s: $\begin{cases} P(-2,0) & \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} \\ \vec{u}(3,2) & 2x+4=3y \end{cases}$

r y s se cortan en un punto

M que equidista de P y P' :

$\begin{cases} r: 3x+2y+2=0 \\ s: 2x-3y+4=0 \end{cases}$

Reducir

$\begin{cases} 9x+6y+6=0 \\ 4x-6y+8=0 \end{cases}$
 $\hline 13x+14=0$

$\begin{cases} x = -\frac{14}{13} \\ y = \frac{8}{13} \end{cases}$

$M(-\frac{14}{13}, \frac{8}{13})$

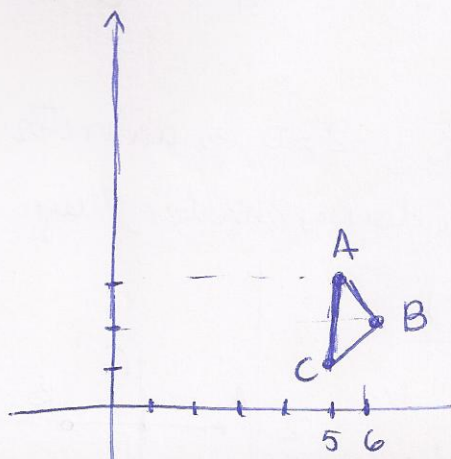
M es el punto medio de $\overline{PP'} \Rightarrow (\frac{x+2}{2}, \frac{y+0}{2}) = (-\frac{14}{13}, \frac{8}{13})$

$P'(\frac{2}{13}, \frac{16}{13})$

$x = \frac{2}{13}$

$y = \frac{16}{13}$

12.- $A(5,3); B(6,2); C(5,1)$



Base: $|\overline{AC}| = b$.

$\overrightarrow{AC} = (0,-2)$ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2$.

Altura: $h = d(B, r)$; $r =$ recta que pasa por $\overline{AC}$

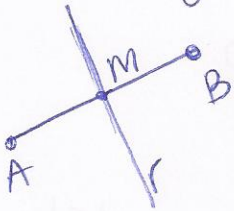
Recta $\overline{AC}$: $\frac{x-5}{0} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow -2x+10=0$.

$h = d(B, r) = \frac{|-2(6)+10|}{\sqrt{(-2)^2+0^2}} = \frac{2}{2} = 1$.

Área = $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \text{ u}^2$

Perímetro: $d(A,C) + d(C,B) + d(A,B) = |\vec{AC}| + |\vec{CB}| + |\vec{AB}| =$
 $= 2 + \sqrt{1^2+1^2} + \sqrt{1^2+(-1)^2} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \boxed{2+2\sqrt{2} \text{ u.}}$

13.- $r: 4x - 3y = 54 \rightarrow$ mediatriz de $\overline{AB}$, $A(1,0)$, $B(x,y)$



Sea s : recta perpendicular a r que pasa por A y B : $\begin{cases} A(1,0) \\ \vec{u}(4,-3) \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Hallamos $M = r \cap s$ (intersección de r y s) $\Rightarrow$

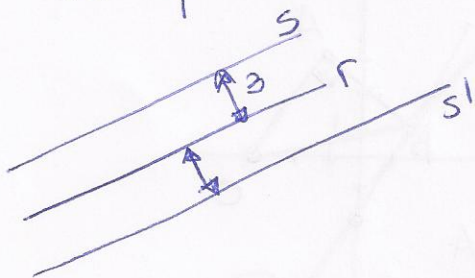
$4(1+4t) - 3(-3t) - 54 = 0$

$4 + 16t + 9t - 54 = 0 \Rightarrow 25t = 50 \quad \boxed{t=2} \quad M = (9, -6)$

Es el punto medio de A y $B \rightarrow (9, -6) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{0+y}{2} \right) \quad \begin{matrix} x=17 \\ y=-12 \end{matrix}$

$\boxed{B(17, -12)}$

14.- paralelas a $3x + 4y - 12 = 0$ que disten de ella 3 unidades:



Tanto s como s' han de tener la forma siguiente: $3x + 4y + C = 0$
 $3 = d(r, s) = d(r, s') = d(P, s) = d(P, s')$
 siendo P un punto de r : $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$

$3 = d(P, s) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + C|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \quad P(0,3)$

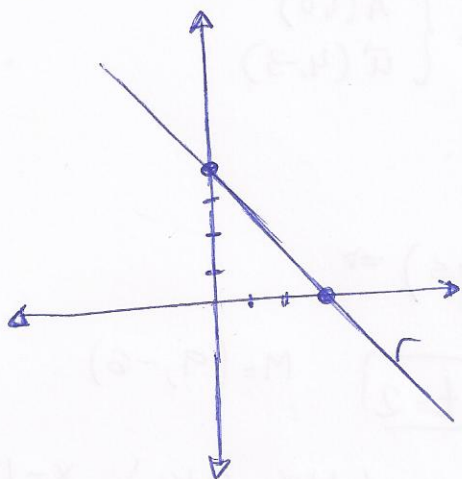
$3 = \frac{|12 + C|}{5} \Rightarrow |12 + C| = 15 \Rightarrow \begin{cases} 12 + C = 15 \\ 12 + C = -15 \end{cases} \quad \begin{matrix} \boxed{C=3} \rightarrow (s) \\ \boxed{C=-27} \rightarrow (s') \end{matrix}$

$\begin{cases} s: 3x + 4y + 3 = 0 \\ s': 3x + 4y - 27 = 0 \end{cases}$

15.- $r: 4x + 3y - 12 = 0$

s: Recta perpendicular a r que diste de (0,0) 5 unidades.

El vector normal a r $\vec{n}_r = (4, 3)$ ha de ser un vector de dirección de s: $\vec{u}_s(4, 3) \rightarrow \vec{n}_s(-3, 4)$



$$s: -3x + 4y + C = 0.$$

$$d(0, s) = 5$$

$$5 = \frac{|-3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + C|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} \Rightarrow 5 = \frac{|C|}{5}$$

$$|C| = 25 \Rightarrow \begin{cases} C = 25 \\ C = -25 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$s: -3x + 4y + 25 = 0$$

$$s': -3x + 4y - 25 = 0$$

16.- $A(1, 3)$

$C(3, 0)$

$B \in r: 2x + y + 2 = 0$

$r: y = -2x - 2$

$B = (t, -2t - 2); t \in \mathbb{R}$

Como el triángulo ha de ser rectángulo en A debe verificarse que: $\vec{AB} \perp \vec{AC}$

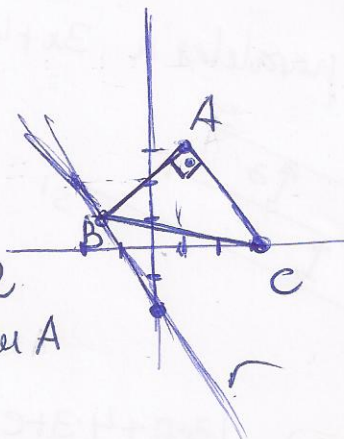
$$\vec{AB} = (t, -2t - 2) - (1, 3) = (t - 1, -2t - 5)$$

$$\vec{AC} = (3, 0) - (1, 3) = (2, -3)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 + 6t + 15 = 0$$

$$8t + 13 = 0 \Rightarrow t = -\frac{13}{8}$$

Por tanto $B\left(-\frac{13}{8}, \frac{10}{8}\right)$



Otra manera de hallar el vértice B habría sido suponer $B(x, y)$ e imponer la misma condición: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, de la que:

$$(x - 1, y - 3) \cdot (2, -3) = 0 \Rightarrow 2x - 2 - 3y + 9 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 7 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por esta ecuación y la recta r $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{13}{8} \\ y = \frac{5}{4} \end{array} \right. \quad B\left(-\frac{13}{8}, \frac{5}{4}\right)$$

$\frac{10}{8}$

Área del triángulo. Por tratarse de un triángulo rectángulo en A, tanto la base como la altura pueden considerarse los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{|\overline{AC}| \cdot |\overline{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{637}}{8}}{2} =$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{\left(-\frac{13}{8} - 1\right)^2 + \left(\frac{10}{8} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{441}{64} + \frac{196}{64}} = \frac{\sqrt{637}}{8} \quad \left\{ \begin{array}{l} = \frac{\sqrt{8281}}{16} \\ = \frac{91}{16} \end{array} \right. = 5.6875$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

u^2

17.- $A(1, -3), B(3, 1)$

$\overline{AB}$ = lado desigual

Tercer vértice $C(x, y)$ verificando que $x + y + 3 = 0$.

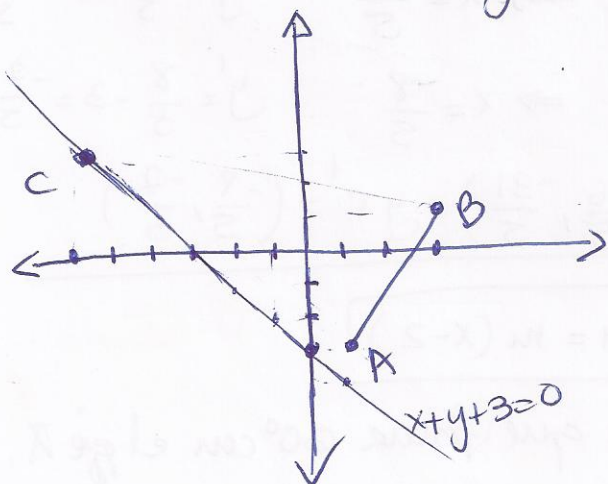
Por ser el triángulo isósceles, debe ocurrir que $d(A, C) = d(B, C)$

$$\left. \begin{array}{l} d(A, C) = |\overline{AC}| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} \\ d(B, C) = |\overline{BC}| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \end{array} \right\} \quad \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10 &= x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10 \\ 4x + 8y &= 0 \Rightarrow x + 2y = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, C pertenece a la recta $x + y + 3 = 0$,

entonces $\left. \begin{array}{l} x + y + 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 3 \\ x = -6 \end{array} \quad \boxed{C(-6, 3)}$



$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}}{2} = 4 u^2$$

$$b = |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$h = d(C, \overline{AB}) = \frac{|4 \cdot (-6) - 2 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{20}}$$

r_{AB} : recta que pasa por A y B: $\begin{cases} \vec{u} = \overline{AB} = (2, 4) \\ A(1, -3) \end{cases}$

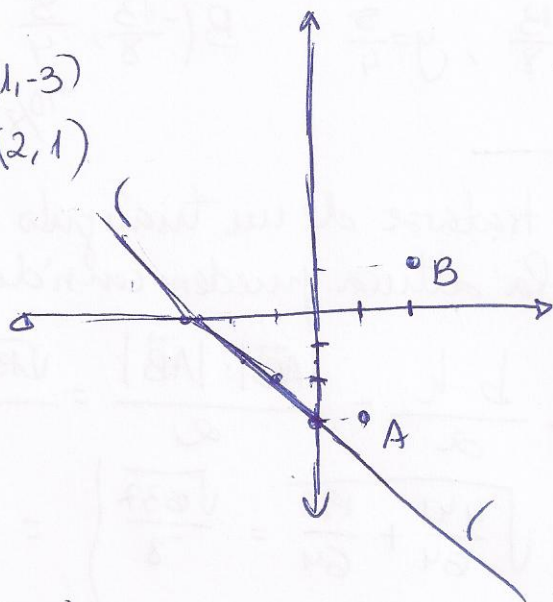
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} \Rightarrow 4x - 4 = 2y + 6$$

$$r_{AB}: 4x - 2y - 10 = 0$$

18.-

$$A(1, -3)$$

$$B(2, 1)$$



$$b = \sqrt{17} \text{ u.}$$

$$h = d(C, r_{AB})$$

↳ altura del triángulo.

Hallemos primero la recta que pasa por A y B: r_{AB} .

$$r_{AB} \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{4}$$

$$\begin{cases} A(1, -3) \\ \vec{u}(1, 4) \end{cases}$$

$$r_{AB} \equiv \begin{cases} 4x - 4 = y + 3 \\ 4x - y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Como } A = \frac{b \cdot h}{2} = 6 \text{ u}^2 \Rightarrow b \cdot h = 12 \Rightarrow h = \frac{12}{b} = \frac{12}{\sqrt{17}}$$

$$h = d(C, r_{AB}) = \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{|4x - y - 7|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} \Rightarrow \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{|4x - y - 7|}{\sqrt{17}}; 12 = |4x - y - 7|$$

$$|4x - y - 7| = 12 \Rightarrow |4x - (-x - 3) - 7| = 12 \Rightarrow |4x + x + 3 - 7| = 12 \Rightarrow$$

$$y = -x - 3$$

↑
Sustitución

$$\Rightarrow |5x - 4| = 12 \Rightarrow \begin{cases} 5x - 4 = 12 \rightarrow x = \frac{16}{5} & y = -\frac{16}{5} - 3 = -\frac{31}{5} \\ 5x - 4 = -12 \Rightarrow x = -\frac{8}{5} & y = \frac{8}{5} - 3 = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Hay dos posibles soluciones: $C(\frac{16}{5}, -\frac{31}{5})$ y $C'(-\frac{8}{5}, -\frac{7}{5})$

19.- $P(2, -4)$ Haz de rectas: $y + 4 = m(x - 2)$

Generación de la recta de este haz que forme 60° con el eje X.

$$C(x, y) \in r: x + y + 3 = 0$$

$$y = -x - 3$$

Consideramos que la base del triángulo es el lado $\overline{AB}$; por tanto

$$b = d(A, B) = |\overline{AB}| =$$

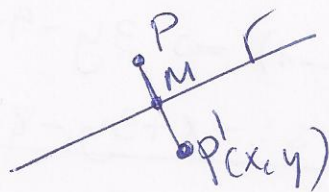
$$= \sqrt{(2-1)^2 + (1-(-3))^2} =$$

$$= \sqrt{1^2 + 16} = \underline{\underline{\sqrt{17} \text{ u.}}}$$

$$m = \tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$r: y+4 = \sqrt{3}(x-2) \Rightarrow \underline{y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 4}$$

20.- $P(1,1)$. Sea $P'(x,y)$ el punto simétrico de P respecto de la recta $r: \frac{x-4}{2} = y$.



Construimos la recta s perpendicular a r que pasa por P :

$$r: x-4 = 2y \Rightarrow x-2y-4=0$$

$\vec{n}_r = (1, -2)$ vector ortogonal o normal a r .

Entonces un vector director de la recta s , es un vector normal a r ;

$$\vec{u}_s(1, -2) \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} \Rightarrow -2x+2=y-1 \Rightarrow \underline{s: -2x-y+3=0}$$

Hallamos M ; punto de intersección de las rectas r y s :

$$\begin{cases} r: x-2y-4=0 \\ s: -2x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \quad M(2, -1)$$

M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$; de manera que

$$\text{si } P'(x,y) \Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2} \right) = (2, -1) \Rightarrow (x+1, y+1) = (4, -2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x,y) = (3, -3) \quad \underline{P'(3, -3)}$$

21.- $P(1,3)$.

$$r: 2x-y-9=0$$

Buscamos la ecuación de una recta s que pase por P y forme un ángulo de 45° con la recta r .

Usamos la fórmula del ángulo que forman las dos rectas relacionando las pendientes respectivas m_r y m_s :

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right| \Rightarrow 1 = \frac{|2 - m_s|}{|1 + 2m_s|} \Rightarrow |1 + 2m_s| = |2 - m_s|$$

$$r: 2x-9=y \rightarrow m_r = 2$$

la recta que buscamos tendrá de ecuación:
 $y-3 = m_s(x-1)$ (puesto que pasa por $P(1,3)$ y tiene m_s de pendiente)

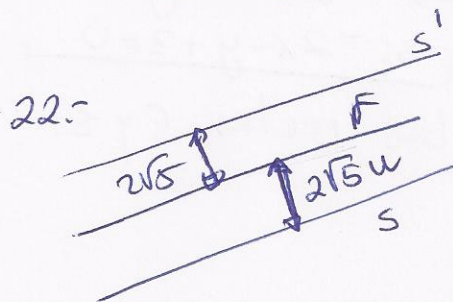
$$|1+2m_s| = |2-m_s| \Rightarrow \begin{cases} 1+2m_s = 2-m_s \Rightarrow 3m_s = 1 \\ 1+2m_s = -2+m_s \Rightarrow m_s = -3 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

• Si $m_s = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$s: y-3 = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow 3y-9 = x-1$
 $s: -x+3y-8=0$

• Si $m_s = -3 \Rightarrow s': y-3 = -3(x-1) \Rightarrow \boxed{3x+y-6=0: s'}$



$r: x+2y-2=0$

s paralela a $r \Rightarrow \boxed{s: x+2y+C=0}$

Debemos determinar C para hallar la ecuación completa de s .

Consideremos P un punto cualquiera de r : Si $x=0 \rightarrow y=1$
 $P(0,1)$.

$d(r,s) = P(P,s) = \frac{|0+2 \cdot 1+C|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2+C|}{\sqrt{5}}$

Por paralelismo

$\frac{|2+C|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |2+C| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 2+C=10 \\ 2+C=-10 \end{cases}$

$C=8$

$C'=-12$

$s: x+2y+8=0$

$s': x+2y-12=0$

(Dos soluciones)

23.- $A(3,5) \quad |\overline{AB}| = |\overline{AB}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$B(6,9) \quad |\overline{BC}| = |\overline{CB}| = \sqrt{6^2+0^2} = 6$

$C(0,9) \quad |\overline{AC}| = |\overline{AC}| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$

Perímetro: $5+6+5=16u$
 $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12u^2$

Tiene dos lados iguales y uno desigual. Es isósceles y no rectángulo. base = $b = |\overline{BC}| = 6u$.

$\hat{A} = \cos \hat{A} = \frac{|\overline{AB} \cdot \overline{AC}|}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{7}{25} \Rightarrow \hat{A} = 73.7^\circ$

$h = d(A, r_{BC}) = \frac{|5-9|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-4|}{1} = 4u$

$r_{BC}: y=9$