EXAMEN: VECTORES

1. Se consideran los vectores $\vec{u} = (-3,6)$ y $\vec{v} = (2,5)$ cuyas coordenadas están dadas respecto de una base ortonormal. Se pide:

a) Calcula el producto escalar de ambos vectores.
b) Encuentra el ángulo que forman.
c) Halla el resultado de la operación $\left(\frac{1}{3}\cdot\vec{u} - 2\cdot\vec{v}\right)\cdot\left(-3\cdot\vec{u}\right)=$
d) Calcula el módulo y las coordenadas del vector proyección de v sobre u.

2. Dado el vector $\vec{u} = (\sqrt{3},-1)$, se pide:
   a) Calcular su módulo.
   b) Calcular dos vectores unitarios que tengan la misma dirección que $\vec{u}$.
   c) Dos vectores ortogonales y del mismo módulo que u.
   d) Halla dos vectores unitarios que sean ortogonales a $\vec{u}$.

3. Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulos $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 4$. Sabiendo que $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{37}$, se pide:

a) Halla el valor de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y el ángulo que forman.
b) Halla $|\vec{u}-\vec{v}|$.

4. Sean los vectores $\vec{v} = (3,x)$ y $\vec{w} = (y,5)$. Calcula el valor de x e y para que ambos vectores sean ortogonales y además $|\vec{w}| = 13$.

5. Dados los vectores $\vec{a} = (1, 5)$ y $\vec{b} = (3, -1)$, halla un vector $\vec{c}$ de manera que se verifique que $\vec{a}\cdot\vec{c} = 1$ y $\vec{c}$ es ortogonal a $\vec{b}$.

1.- $\vec{u}=(-3,6)$
$\vec{v}=(2,5)$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3\cdot 2+6\cdot 5=24$

b) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{24}{\sqrt{9+36}\cdot\sqrt{4+25}}$;

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=48^\circ 21' 59'26''$.

c) $\left(\frac{1}{3}\vec{u}-2\vec{v}\right)(-3\vec{u})=-1\,\vec{u}\cdot\vec{u}+6\,\vec{v}\cdot\vec{u}=-|\vec{u}|^2+6\vec{u}\cdot\vec{v}=$
$=-(9+36)+6\cdot 24=99$

o bien; $\underbrace{\left[\frac{1}{3}(-3,6)-2(2,5)\right]}_{(-1,2)-(4,10)}\cdot(9,-18)=(-5,-8)\cdot(9,-18)=\underline{\underline{99}}$

d) $|\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}|=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}=\dfrac{24}{\sqrt{45}}=\dfrac{24}{3\sqrt{5}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

$\underline{\underline{\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}}}}=\dfrac{24}{\sqrt{45}}\cdot\left(\dfrac{-3}{\sqrt{45}},\dfrac{6}{\sqrt{45}}\right)=\left(\dfrac{-72}{45},\dfrac{144}{45}\right)=\underline{\underline{\left(\dfrac{-8}{5},\dfrac{16}{5}\right)}}$

2.- $\vec{u}=(\sqrt{3},-1)$

a) $\underline{\underline{|\vec{u}|}}=\sqrt{3+1}=2$

b) $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1}{2}\right)$
$-\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

c) $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ ortogonales
$\vec{v}\,'=(-1,-\sqrt{3})$ a $\vec{u}$ y con su mismo módulo.

d) $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\dfrac{\vec{v}\,'}{|\vec{v}\,'|}=\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

3.- $|\vec{u}|=3$; $|\vec{v}|=4$ $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{37}$

a) $|\vec{u}+\vec{v}|^2=37 \Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2=37 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9+2\vec{u}\cdot\vec{v}+16=37 \Rightarrow 2\vec{u}\cdot\vec{v}=37-25 \Rightarrow \underline{\vec{u}\cdot\vec{v}}=\dfrac{12}{2}=\underline{6}$

Con ello, $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=6}$ $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{6}{3\cdot 4}=1/2 \Rightarrow \boxed{(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=60^\circ}$

b) $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\,\vec{v} + |\vec{v}|^2 =$

$= 9 - 2\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{6} + 16 = 9 - 12 + 16 = 13.$

$\boxed{|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{13}}$

4.- $\vec{v} = (3, x)$ $\quad$ $\vec{w} = (y, 5)$

$\vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3, x)\cdot(y, 5) = 0 \Rightarrow \boxed{3y + 5x = 0}$

Por otro lado $|\vec{w}| = 13$

$y^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow y^2 = 144 \Rightarrow \boxed{y = \pm 12}$

Si $y = +12 \Rightarrow x = \frac{-36}{5}$

Si $y = -12 \Rightarrow x = 36/5$

Hay 2 soluciones: $\left(3, -\frac{36}{5}\right); (12, 5)$

$\left(3, \frac{36}{5}\right); (-12, 5)$

5.- $\vec{a} = (1, 5)$ $\quad$ $\vec{b} = (3, -1)$

$\vec{c}$? $\quad$ Suponemos $\vec{c} = (x, y)$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 1 \Rightarrow 1\cdot x + 5y = 1 \Rightarrow x + 5y = 1$

$\vec{c} \perp \vec{b} \Rightarrow 3\cdot x - 1y = 0 \Rightarrow 3x - y = 0$

Resolviendo el sistema: $y = 3x \rightarrow x + 15x = 1$ $\quad$ $x = \frac{1}{16}$, $y = \frac{3}{16}$

$\boxed{\vec{c} = \left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right)}$

(*) Otra forma: Por ser $\vec{c}$ ortogonal a $\vec{b}$ debe llevar la dirección del vector $(1, 3)$. Por tanto $\vec{c}$ es de la forma: $\vec{c} = (1K, 3K) = (K, 3K)$; siendo K un nº que debemos hallar. Imponemos la condición $\vec{a}\cdot\vec{c} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1, 5)\cdot(K, 3K) = 1 \Rightarrow K + 15K = 1 \Rightarrow 16K = 1;$ $\boxed{K = \frac{1}{16}}$

Entonces $\boxed{\vec{c} = \left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right)}$