FUNCIONES: LIMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcula el límite cuando $x \to \infty$ de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 9}{2x + 3}$ $\quad b)\ g(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1}$ $\quad c)\ h(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 7}$

$d)\ i(x) = \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2}\right)$ $\quad e)\ j(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$ $\quad f)\ k(x) = e^{-x} + 3$

$g)\ l(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$ $\quad h)\ m(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$

2. Calcula el límite cuando $x \to -\infty$ de las funciones:

$a)\ f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 9}{2x + 3}$ $\quad b)\ g(x) = \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$ $\quad c)\ h(x) = \dfrac{-2x^3 + 5x^2 + 3}{2x^2 + x - 8}$

$d)\ i(x) = \dfrac{6x^2 + 3x - 5}{x^5 + x^3}$ $\quad e)\ j(x) = 3^{2x+3}$

3. Calcula los siguientes límites, en caso de que existan:

$a)\ \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 4}$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$

$d)\ \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x}$ $\quad e)\ \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 - 3x}$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x + 3}{(x + 2)^2}$

$g)\ \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x}$ $\quad h)\ \lim\limits_{x\to2} \dfrac{-1}{x - 2}$ $\quad i)\ \lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$

$j)\ \lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$ $\quad k)\ \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x}$

4. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \dfrac{1 - x}{x + 2}$ $\quad b)\ f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$ $\quad c)\ f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$ $\quad d)\ f(x) = \dfrac{5x}{x - 1}$

$e)\ f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$ $\quad f)\ f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x - 4}$ $\quad g)\ f(x) = \dfrac{4x^2}{x - 1}$ $\quad h)\ f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2}$

5. Estudia la continuidad de las siguientes funciones y representa gráficamente

$a)\ f(x) = \dfrac{5x}{x - 1}$ $\quad b)\ f(x) = \begin{cases} x + 3 & si\ x < 0 \\ x - 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & si\ x < 1 \\ x^2 - x + 1 & si\ 1 \leq x < 3 \\ x^2 - 4 & si\ x \geq 3 \end{cases}$ $\quad d)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si\ x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & si\ x \geq 2 \end{cases}$

$e)\ f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & si\ x \leq 3 \\ x - 3 & si\ 3 < x < 6 \\ 1 & si\ x \geq 6 \end{cases}$ $\quad f)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2} & si\ x \neq 2 \\ -4 & si\ x = 2 \end{cases}$

6. ¿Cómo elegirías el valor de f(1) para que la función f(x) fuese continua en x=1?

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1},\quad si\ x \neq 1}$$

7. Calcula el valor del parámetro a en cada caso para que las siguientes funciones sean continuas:

$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & si\ x \leq 2 \\ a - x^2 & si\ x > 2 \end{cases}$ $\quad b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - a & si\ x < 3 \\ 4x + 1 & si\ x \geq 3 \end{cases}$

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-4x-9}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{2}x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+6x}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2\,x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+7}\right) \underset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+7}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+7}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+7}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2+x)-(x^2+7)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+7}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-7}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+7}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2-5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right) \underset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2(x^2-5x)}{2(x+1)} - \dfrac{3x(x+1)}{2(x+1)}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-10x-3x^2-3x}{2x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2-13x}{2x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} = -\infty.$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}+3 = 0+3 = 3.$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-4} - x\right) \underset{\substack{(\infty-\infty)\\ \text{indet}}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0.$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \underset{\substack{\text{indet}\\ (\infty-\infty)}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}+x} = \dfrac{1}{2}.$

2.- a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-4x-9}{2x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} = -\infty.$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4-6x+2}{3x^4+x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4}{3x^4} = \frac{5}{3}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+5x^2+3}{2x^2+x-8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{2} = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2+3x-5}{x^5+x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2}{x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x^3} = 0.$

e) $\lim_{x\to-\infty} 3^{2x+3} = (3^{-\infty}) = 0.$

3.- a) $\lim_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10} = (\text{indet } 0/0) = \lim_{x\to-2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x^2+5)}$

$= \lim_{x\to-2} \frac{x-2}{x^2+5} = \frac{-4}{9}.$

b) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+3}{x^2-5x+4} = (\text{indet } \frac{4}{0})$. Calculamos límites laterales:

$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2+3}{x^2-5x+4} = +\infty \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+3}{x^2-5x+4} = -\infty$

c) $\lim_{x\to-1} \frac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7} = (\text{indet } \frac{0}{0}) = \lim_{x\to-1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-3x+5)}{\cancel{(x+1)}(x-7)} = -\frac{9}{8}.$

d) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-2x} = (\text{indet } 0/0) = \lim_{x\to1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{2x\cancel{(x-1)}} = \frac{3}{2}.$

e) $\lim_{x\to3} \frac{x^3-x^2}{x^2-3x} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to3^-} \frac{x^3-x^2}{x^2-3x} = -\infty \\ \lim_{x\to3^+} \frac{x^3-x^2}{x^2-3x} = +\infty \end{cases}$

(indet 18/0)

f) $\lim_{x\to-2} \frac{x+3}{(x+2)^2} = (\text{indet } 1/0) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to-2^-} \frac{x+3}{(x+2)^2} = +\infty \\ \lim_{x\to-2^+} \frac{x+3}{(x+2)^2} = -\infty \end{cases}$

g) $\lim_{x\to0} \frac{x^4-x^3+3x}{x^2-x} \underset{0/0}{=} \lim_{x\to0} \frac{x(x^3-x^2+3)}{x(x-1)} = -3$

h) $\lim_{x\to2} \frac{-1}{x-2} = (\text{indet } -1/0) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to2^-} \frac{-1}{x-2} = +\infty \\ \lim_{x\to2^+} \frac{-1}{x-2} = -\infty \end{cases}$

i) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2-25} \underset{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x+1)}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \frac{6}{10} = 3/5$

j) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \underset{\text{indet } 0/0}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{2+2}+2} = \frac{1}{4}$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} = \text{indet } 0/0 = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

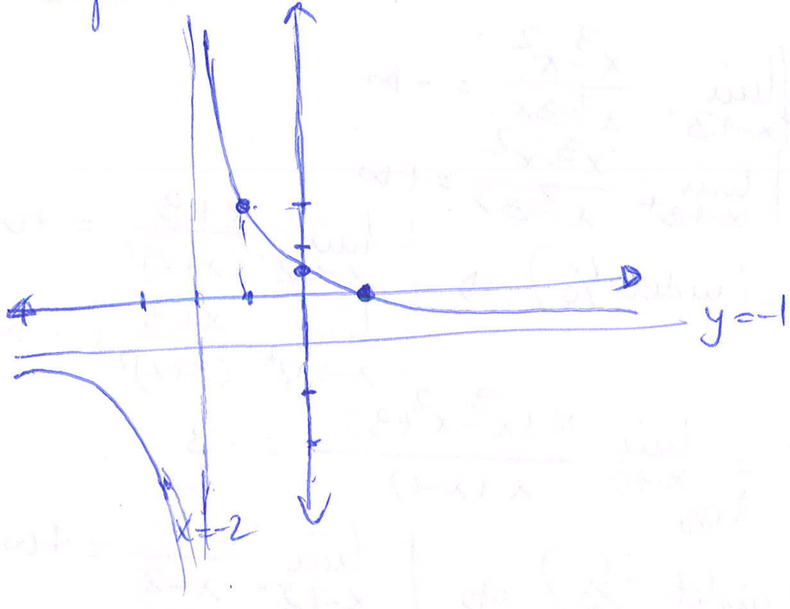
$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-(1-x)}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{3\cdot 2} = \frac{1}{3}$

4.- a) $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ $\quad Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -2^-} \frac{1-x}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^+} \frac{1-x}{x+2} = +\infty \end{array}\right\}$ Existe una asíntota vertical de ecuación $\boxed{x=-2}$

$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1-x}{x+2} = -1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$ Asíntota horizontal.

Representación Gráfica



b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ Dom $= \mathbb{R} - \{-1\}$

· Asíntota vertical: $x=-1$ puesto que $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \end{cases}$

· No hay asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^2}{x}}_{x} = +\infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

· Presenta una asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1 \Rightarrow m=1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - x}{x+1} = -1 \quad n=-1$$

Por tanto $\underline{y = x-1}$, Ecuación de la asíntota oblicua.

c) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$ Dom $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

· Asíntotas VERTICALES:

$\boxed{x=-2}$ $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{2x^2}{x^2-4} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{2x^2}{x^2-4} = -\infty$.

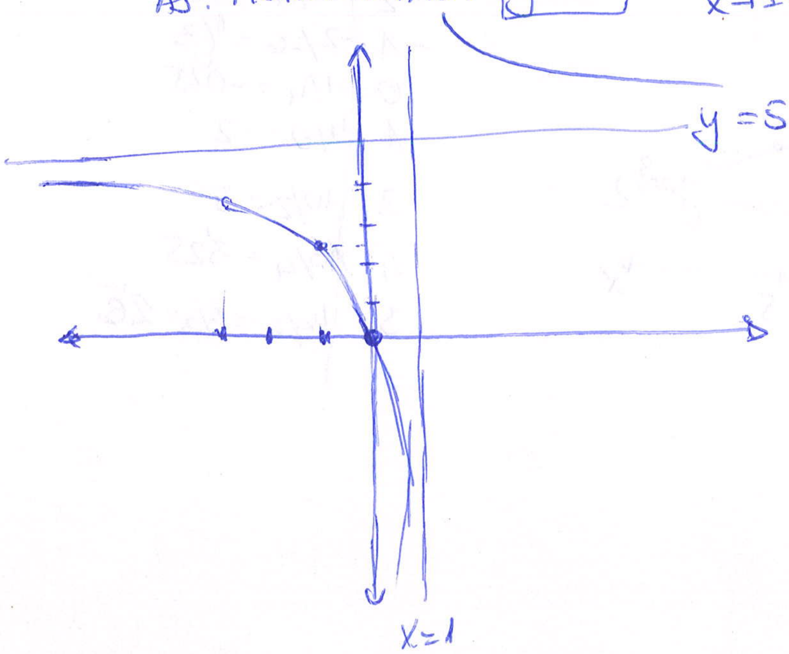
$\boxed{x=2}$ $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2x^2}{x^2-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2x^2}{x^2-4} = +\infty$.

· Asíntota horizontal: $\boxed{y=2}$ puesto que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \underline{\underline{2}}$

d) $f(x) = \frac{5x}{x-1}$ Dom $= \mathbb{R} - \{1\}$

As. VERTICAL: $\boxed{x=1}$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{5x}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{5x}{x-1} = +\infty$

As. HORIZONTAL: $\boxed{y=5}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x-1} = 5$



x	y
-4	4
-3	-15/-4 = 3'75
-1	-5/-2 = 2'5
0	0
2	10
3	15/2 = 7'5
4	20/3 = 6'6
5	25/4 = 6'25
6	30/5 = 5

e) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-9}$ $\quad x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Dom $= \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

- Estudiamos la existencia de asíntotas verticales en $x=-3$ y $x=3$:

$\boxed{\text{En } x=-3}$: $\lim_{x\to -3} \dfrac{2x^2}{x^2-9} = \left(\text{indet } \dfrac{18}{0}\right)$ $\quad \boxed{x=-3}$ es una as. vertical

$\lim_{x\to -3^-} \dfrac{2x^2}{x^2-9} = +\infty$; $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{2x^2}{x^2-9} = -\infty$

$\boxed{\text{En } x=3}$: $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x^2}{x^2-9} = \left(\text{indet } \dfrac{18}{0}\right)$ $\quad \boxed{x=3}$ As. vertical.

$\lim_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2}{x^2-9} = -\infty$; $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{2x^2}{x^2-9} = +\infty$

Hay 2 asíntotas verticales.

- Asíntota horizontal: Se estudia el comportamiento de $f(x)$ en $+\infty$ ó $-\infty$:

$\lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2-9} = 2$. $\quad \boxed{y=2}$ Ecuación de la asíntota horizontal.

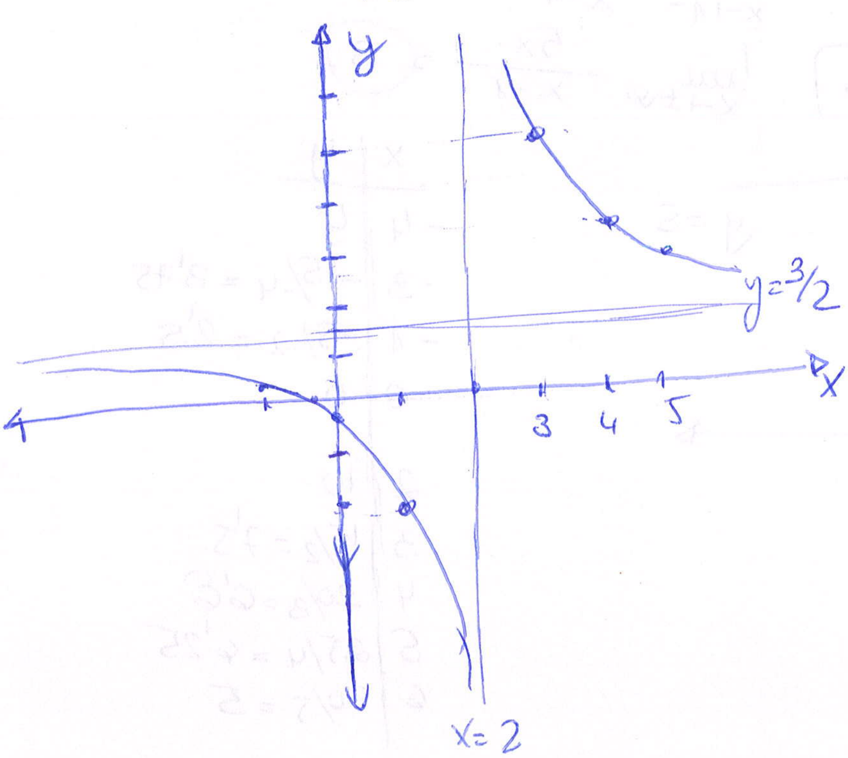
f) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$ $\quad$ Dom $= \mathbb{R} - \{2\}$.

$\lim_{x\to 2^-} \dfrac{3x+1}{2x-4} = -\infty$

$\boxed{x=2}$ es una Asíntota Vertical

$\lim_{x\to 2^+} \dfrac{3x+1}{2x-4} = +\infty$

Por otro lado $\lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x+1}{2x-4} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{3}{2}}$ asíntota horizontal.



x	y
-2	-5/-8 = 5/8
-1	-2/-6 = 1/3
0	-1/4 = -0'25
1	4/-2 = -2
3	10/2 = 5
4	13/4 = 3'25
5	16/6 = 8/3 = 2'6̂

g) $f(x) = \frac{4x^2}{x-1}$ Dom $= \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim_{x\to 1} \frac{4x^2}{x-1}$ " $=$ indet $\frac{4}{0}$ " $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{4x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{4x^2}{x-1} = +\infty \end{cases}$

f presenta en $x=1$ una ASÍNTOTA VERTICAL. $\boxed{x=1}$

Estudiamos que ocurre en $+\infty$ o $-\infty$:

$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2}{x-1} = +\infty$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2}{x-1} = -\infty$ f no presenta ASÍNTOTAS HORIZONTALES.

Buscamos para ver si hay alguna asíntota oblícua. Es una recta de la forma $y = mx+n$.

$\underline{m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{x^2-x} = \underline{4}$ → Como este límite existe, es finito y distinto de 0, f presenta una asíntota oblícua de ~~pendiente~~ gradiente $\underline{m=4}$.

$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - \underset{m}{4}x] =$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x^2}{x-1} - 4x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x^2}{x-1} - \frac{4x^2-4x}{x-1} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x-1} = 4$.

$\boxed{y = 4x+4}$ Ecuación de la asíntota oblícua.

h) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$ Dom $= \mathbb{R}$.

f no presenta asíntotas verticales.

Estudiamos su comportamiento en $\pm\infty$ para ver si hay alguna asíntota horizontal: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2+2} = 3$.

f presenta una Asíntota HORIZONTAL de ecuación $\boxed{y=3}$

5.- a) $f(x) = \frac{5x}{x-1}$ D $= \mathbb{R} - \{1\}$.

f es continua, por ser cociente de funciones continuas, en todos los puntos salvo ~~quizá~~ en $x=1$, donde no está definida.

Veamos como se comporta en $x=1$:

$\lim_{x\to 1} \frac{5x}{x-1}$ " $=$ indet $\frac{5}{0}$ " $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 1^-} \frac{5x}{x-1} = -\infty$ $\lim_{x\to 1^+} \frac{5x}{x+1} = +\infty$

No existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $f(1)$ no está definida. En este caso la función presenta en $x=1$ una As. vertical.

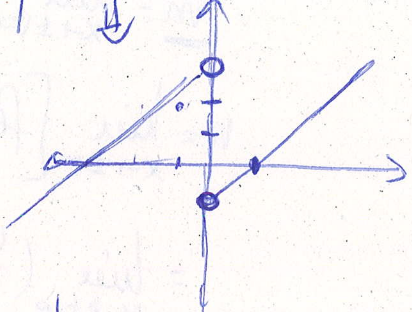
f es continua en todos los puntos excepto en $x=1$ donde presente una discontinuidad de salto infinito.

b) $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x<0 \\ x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ Las funciones parciales son continuas, pero se deben estudiar límites laterales en $x=0$:

$f(0)=0-1=-1$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} x+3=3 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} x-1=-1 \end{array}\right\}$ $\neq$ $\exists$ límites laterales, son finitos pero diferentes

f es continua en $\mathbb{R}$ excepto en $x=0$ donde presenta una discontinuidad de salto finito.



c) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x<1 \\ x^2-x+1 & \text{si } 1\leq x<3 \\ x^2-4 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

Las funciones que forman f son polinómicas, luego se trata de funciones continuas. Estudiamos que ocurre en $x=1$ y en $x=3$.

En $x=1$

$f(1)=1^2-1+1=1$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} 2-x^2=1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2-x+1=1 \end{array}\right\}$ $\exists \lim_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$

f es continua en $x=1$

En $x=3$

$f(3)=3^2-4=5$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3} x^2-x+1=9-3+1=7 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3} x^2-4=5 \end{array}\right\}$ f discontinua en $x=3$

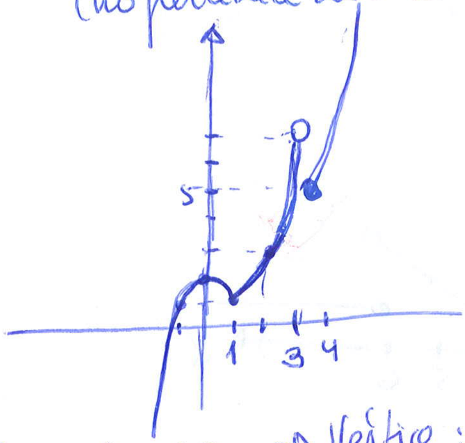
f es continua en $\mathbb{R}$, excepto en $x=3$ donde presenta una discontinuidad de salto finito.

x	y
-1	1
0	2
1	1
2	3
3	5
4	12

$y = 2 - x^2 \rightarrow$ Vértice $x=0$ (no pertenece al dominio)

$y = x^2 - x + 1$
$V: x = \frac{1}{2} \notin [1,3)$

$y = x^2 - 4$
$V: x = 0 \notin [3, +\infty)$



d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $\rightarrow$ Vértice : $x = 0 \in (-\infty, 2)$

$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ (En este caso se verifica)

f está formada por funciones continuas.
Estudiemos el límite en $x = 2$:

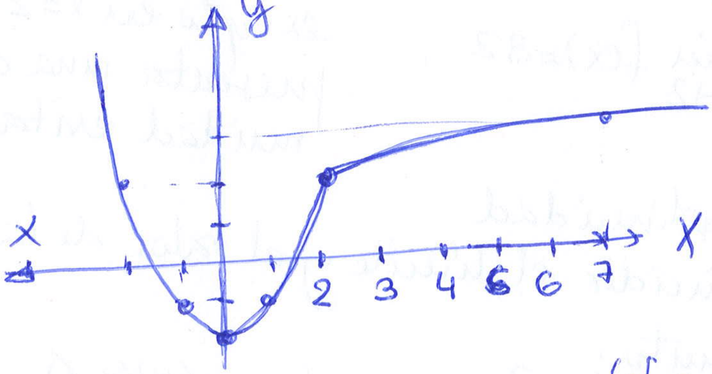
$f(2) = \sqrt{2+2} = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 - 2 = 2$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} \sqrt{x+2} = 2$

$\exists \lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$.

La función es continua en $x = 2$ y con ello, continua en $\mathbb{R}$.



x	y
-2	2
-1	1
0	-2
1	+1
2	2
3	$\sqrt{5}$
7	3

e) $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$ $(V: x = \frac{3}{2})$

f es continua en $\mathbb{R}$ excepto quizá en $x = 3$ y $x = 6$ donde estudiamos límites laterales:

En $x = 3$:

$f(3) = 3 \cdot 3 - 3^2 = 0$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} 3x - x^2 = 0$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} x - 3 = 0$

$\exists \lim_{x \to 3} f(x) = 0 = f(3) \Rightarrow$ f cont. en x3

En $x = 6$

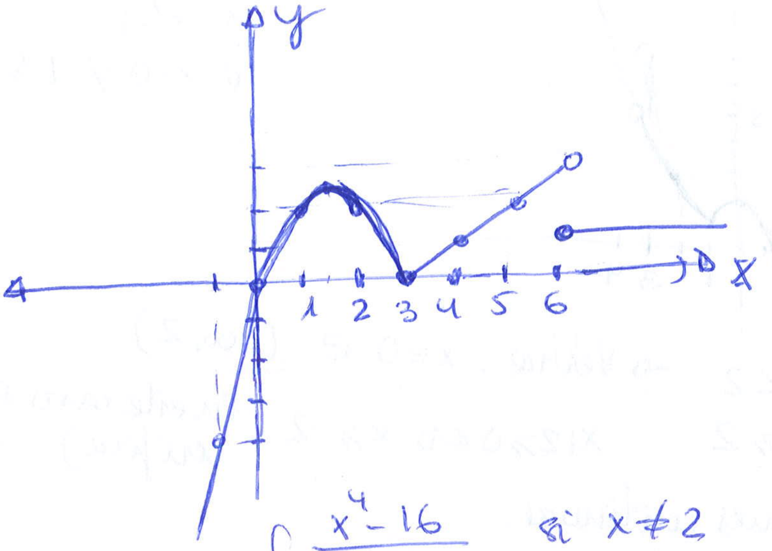
$f(6) = 1$

$\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6} x - 3 = 3$

$\lim_{x \to 6^+} f(x) = \lim_{x \to 6} 1 = 1$.

f discontinua en $x = 1$

f es continua en $\mathbb{R}$, excepto en $x=6$, donde presenta una discontinuidad de salto finito.



x	y
−1	−4
0	0
1	2
3/2	2'25
2	2
3	0

f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \\ -4 & \text{si } x=2 \end{cases}$

f debe de estudiarse en $x=2$, en el resto de los valores es continua.

$f(2)=-4$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}=\left(\text{indet } \dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x^2+4)}{\cancel{x-2}}$

$=4\cdot 8=32$

$f(2)=-4\neq\lim\limits_{x\to 2} f(x)=32$.

f continua en $\mathbb{R}$ excepto en $x=2$ donde presenta una discontinuidad evitable.

6.- Para que exista continuidad en $x=1$ deben coincidir el límite y el valor de la función en dicho punto:

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1}\underset{\text{indet}\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=1.$

$\boxed{f(1)=1}$

7.- a) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x\leq 2 \\ a-x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

$f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$4+2a=4+2a=a-4$

$\boxed{a=-8}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-a & \text{si } x<3 \\ 4x+1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

$f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$13=9-a=13 \Rightarrow 9-13=a$

$\boxed{a=-4}$