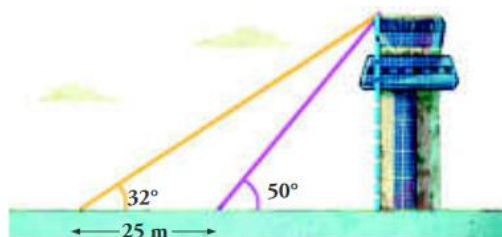


(1,5 puntos) 1. Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Halla (**sin utilizar la calculadora, utilizando las fórmulas trigonométricas que conoces y operando con fracciones y radicales**) las restantes razones trigonométricas de: a) α
b) $90^\circ - \alpha$.

(2 puntos) 2. Queremos medir la altura de una torre. Desde un punto situado a cierta distante de ella, el punto más alto de la misma forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 25 m caminando hacia la torre en la misma dirección, ahora el ángulo de elevación es de 50° . ¿Cuál es la altura de la torre? (**Aquí sí puedes y debes usar la calculadora**)



(1,5 puntos) 3. Reduce las siguientes expresiones utilizando las relaciones entre ángulos que conoces (**sin calculadora**):

a) $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - \cos(360^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ + \alpha)$

b) $\cos \frac{14\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$

(1,5 puntos) 4. Resuelve el siguiente triángulo (**con calculadora**):

$a = 60 \text{ m}$, $b = 30 \text{ m}$, $B = 25^\circ$



(1 punto) 5. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha} = \cot g \alpha$

(2 puntos) 6. Las diagonales de un paralelogramo miden 5 y 6 centímetros respectivamente. Ambas se cortan bajo un ángulo de 50° . Halla el perímetro del paralelogramo (**con calculadora**).

① $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ \rightarrow 3^\circ \text{ cuadrante}$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow{3^\circ \text{ cuadrante}}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-2/3}{-\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

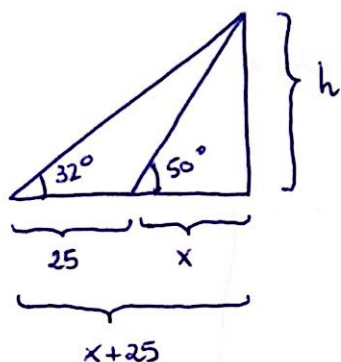
a)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3} &\longrightarrow \operatorname{cosec} \alpha = -\frac{3}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} &\longrightarrow \sec \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} &\longrightarrow \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3} \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

②



$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \longrightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$$

$$\operatorname{tg} 32^\circ = \frac{h}{x+25} \longrightarrow h = (x+25) \cdot \operatorname{tg} 32^\circ$$

Igualo:

$$x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = (x+25) \cdot \operatorname{tg} 32^\circ$$

$$x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = x \cdot \operatorname{tg} 32^\circ + 25 \cdot \operatorname{tg} 32^\circ$$

$$x (\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ) = 25 \cdot \operatorname{tg} 32^\circ$$

$$x = \frac{25 \cdot \operatorname{tg} 32^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ} = 27,56 \text{ m}$$

Calculamos la altura:

$$h = x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = 27,56 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = \boxed{32,84 \text{ m}}$$

$$\textcircled{3} \quad a) \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - \cos(360^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ + \alpha) =$$

$$= \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \boxed{1}$$

$$b) \cos \frac{14\pi}{3} + \sin \frac{7\pi}{6} = \cos 840^\circ + \sin 210^\circ = \cos 120^\circ + \sin 210^\circ =$$

$$\underbrace{\frac{840^\circ}{120}}_{2} \frac{360^\circ}{2} = \cos(180^\circ - 60^\circ) + \sin(180^\circ + 30^\circ) =$$

$$= -\cos 60^\circ - \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{-1}$$

$\textcircled{4}$ Teorema de los senos:

$$\frac{30}{\sin 25^\circ} = \frac{60}{\sin A} \Rightarrow \sin A = \frac{60 \cdot \sin 25^\circ}{30} \Rightarrow A = \arcsin\left(\frac{60 \cdot \sin 25^\circ}{30}\right) =$$

$$= \begin{cases} A_1 = 57,7^\circ \\ A_2 = 180^\circ - 57,7^\circ = 122,3^\circ \end{cases}$$

• Si $A_1 = 57,7^\circ \Rightarrow C_1 = 180^\circ - 57,7^\circ - 25^\circ = 97,3^\circ$

Para calcular c_1 usamos el teorema del coseno:

$$c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C_1} = \sqrt{60^2 + 30^2 - 2 \cdot 60 \cdot 30 \cdot \cos 97,3^\circ} =$$

$$= 70,4 \text{ m}$$

• Si $A_2 = 122,3^\circ \Rightarrow C_2 = 180^\circ - 122,3^\circ - 25^\circ = 32,7^\circ$

$$c_2 = \sqrt{60^2 + 30^2 - 2 \cdot 60 \cdot 30 \cdot \cos 32,7^\circ} = 38,35 \text{ m}$$

Las dos soluciones son:

$\textcircled{1} \quad a = 60 \text{ m}$

$b = 30 \text{ m}$

$c = 70,4 \text{ m}$

$A = 57,7^\circ$

$B = 25^\circ$

$C = 97,3^\circ$

$\textcircled{2} \quad a = 60 \text{ m}$

$b = 30 \text{ m}$

$c = 38,35 \text{ m}$

$A = 122,3^\circ$

$B = 25^\circ$

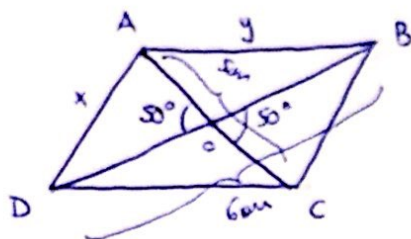
$C = 32,7^\circ$

5

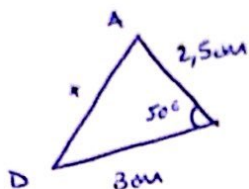
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha} = \cotg \alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \cotg \alpha$$

6



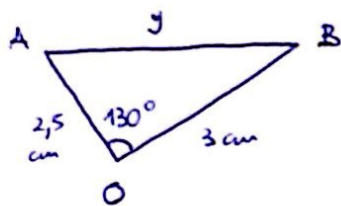
Tomamos el triángulo $\triangle ADO$:



Aplico teorema del coseno.

$$x = \sqrt{3^2 + 2,5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2,5 \cdot \cos 50^\circ} = 2,37 \text{ cm}$$

Tomamos el triángulo $\triangle AOB$:



Volvemos a aplicar teorema del coseno:

$$y = \sqrt{2,5^2 + 3^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \cos 130^\circ} = 4,99 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 2x + 2y = 2 \cdot 2,37 + 2 \cdot 4,99 = \boxed{14,72 \text{ cm}}$$