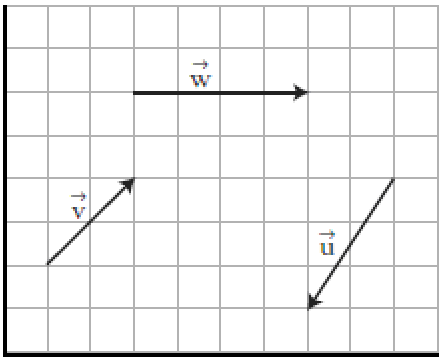
VECTORES

1. Considera los vectores representados en la siguiente figura:



1.1.Representa:

a) $-\vec{v} - 2\vec{u}$ b) $\vec{v} + 3\vec{w}$ c) $-\vec{w} + 2\vec{v} + \vec{u}$

1.2. Determina las coordenadas de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y calcula las coordenadas de estos vectores:.

a) $2\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u}$ b) $-\vec{v} - 2\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w}$

1.3. Razona si $\vec{u}$, $\vec{v}$ forman una base y expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2. Las coordenadas de dos vectores son $\vec{u}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}\left(2, -\frac{3}{2}\right)$. Calcula:

a) El producto escalar de ambos vectores.
b) El módulo de cada uno.
c) El ángulo que forman.

3. Los módulos de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que forman un ángulo de 60°, son $|\vec{u}| = 2$ y $|\vec{v}| = 5$. Calcula:

a) $3\vec{v} \cdot (-2\vec{u})$ b) $\vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$

4. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(1, 0)$ y $\vec{v}(m, 1)$ formen un ángulo de 120°.

5. Dado el vector $\vec{u}(3,4)$, determinar:

a) Un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.

b) Un vector ortogonal a $\vec{u}$.

c) Un vector ortonormal a $\vec{u}$.

6. Calcula m y n para que los vectores $\vec{u}(-3, n)$ y $\vec{v}(m, 6)$ sean ortogonales y $|\vec{u}| = 5$.

7. Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcular k de modo que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$

8. Dados los vectores $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(6, 2)$, hallar un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w} \cdot \vec{u} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{w}$

9. Dado los siguientes puntos A(4, –2), B(1, 7), C(2, 4)

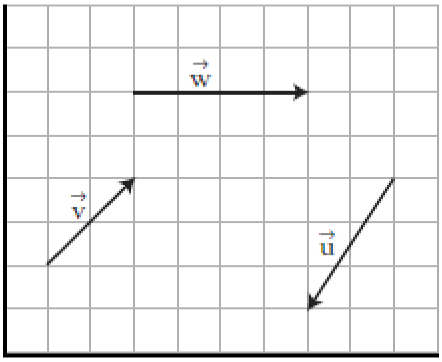
a) Hallar el simétrico del punto A respecto de C.
b) Calcular el punto medio, M, del segmento AB.
c) ¿Están alineados los tres puntos A, B y C? Razona tu respuesta.
d) Calcular las coordenadas de un punto D de manera que se verifique $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$

10. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,4) y C(-5,9), se pide:

a) Demostrar que es rectángulo en A
b) Calcular los otros dos ángulos.
c) Calcular su área.

SOLUCIONES

1. Considera los vectores representados en la siguiente figura:



1.1.Representa:

a) $-\vec{v}\ -2\vec{u}$ b) $\vec{v}\ +3\vec{w}$ c) $-\vec{w}+2\vec{v}+\vec{u}$

1.2. Determina las coordenadas de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y calcula las coordenadas de estos vectores:.

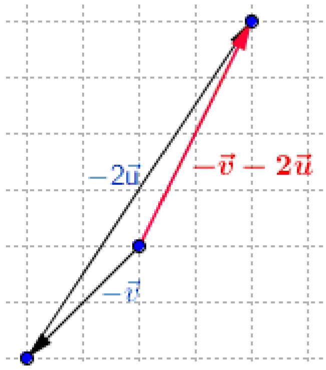
a) $2\vec{v}\ +\ \frac{3}{4}\vec{u}$ b) $-\vec{v}\ -2\vec{u}\ +\ \frac{3}{2}\vec{w}$

1.3. Razona si $\vec{u}$, $\vec{v}$ forman una base y expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

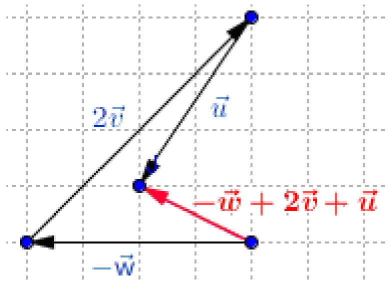
1.1. Representa:

a) $-\vec{v}\ -2\vec{u}$ b) $\vec{v}\ +3\vec{w}$ c) $-\vec{w}+2\vec{v}+\vec{u}$

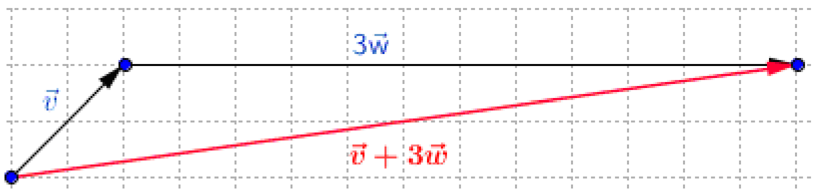
a)



c)



b)



1.2.) Se consideran los vectores $\vec{v}\,(2,2)$, $\vec{u}\,(-2, -3)$ y $\vec{w}\,(4, 0)$.

Calcula las coordenadas de estos vectores:

I) $2\vec{v}\ +\ \frac{3}{4}\vec{u} = 2\cdot(2,2)+\frac{3}{4}(-2,3)=\left(\frac{10}{4},\frac{7}{4}\right)$

II) $-\vec{v}\ -2\vec{u}\ +\ \frac{3}{2}\vec{w} = -(2,2)-2\cdot(-2,-3)+\frac{3}{2}(4,0)=(8,\ 4)$

1.3. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base porque son linealmente independientes ya que sus coordenadas no son proporcionales.

$\vec{w}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}\longrightarrow(4,0)=a(-2,-3)+b(2,2)\longrightarrow\begin{cases}4=-2a+2b\\0=-3a+2b\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=4\\b=6\end{cases}\rightarrow.\ \vec{w}=4\vec{u}+6\vec{v}$

2. Las coordenadas de dos vectores son $\vec{u}\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}\left(2,-\frac{3}{2}\right)$. Calcula:

a) El producto escalar de ambos vectores.

Aplicando la expresión analítica del producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{25}{12}$$

b) El módulo de cada uno.

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

c) El ángulo que forman.

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} = \frac{-\frac{25}{12}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{2}} = -\frac{\frac{25}{12}}{\frac{25}{12}} = -1 \rightarrow (\vec{u},\vec{v}) = 180^{\circ}$$

3. Los módulos de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que forman un ángulo de 60°, son $\left|\vec{u}\right|=2$ y $\left|\vec{v}\right|=5$.

Calcula:

a) $3\vec{v}\cdot(-2\vec{u})$

b) $\vec{v}\cdot(\vec{v}+\vec{u})$

En este ejercicio se aplica las propiedades del producto escalar:

a) $3\vec{v}\cdot(-2\vec{u}) \underset{(1)}{=} -6\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{u}\right) = -6\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos 60^{\circ} = -6\cdot 2\cdot 5\cdot 0{,}5 = -30$

(1) Hemos aplicado la propiedad asociativa: $k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v})$

b) $\vec{v}\cdot(\vec{v}+\vec{u}) \underset{(1)}{=} \vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u} \underset{(2)}{=} \left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos 60^{\circ} = 25+5=30$

(1) Por la propiedad distributiva: $\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$

(2) Para cualquier vector $\vec{v}$ se verifica: $\vec{v}\cdot\vec{v} = \left|\vec{v}\right|^2$

4. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(1, 0)$ y $\vec{v}(m, 1)$ formen un ángulo de 120°.

$$\cos 120^{\circ} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} \rightarrow -\frac{1}{2} \underset{(1)}{=} \frac{m}{1\cdot\sqrt{m^2+1}} \rightarrow -2m=\sqrt{m^2+1} \rightarrow 4m^2 = m^2+1 \rightarrow 3m^2 = 1 \rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (1, 0)\cdot(m, 1) = m$ $\qquad \left|\vec{u}\right| = \sqrt{1}=1$ $\qquad \left|\vec{v}\right| = \sqrt{m^2+1}$

Si $m = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow$ los dos ángulos no pueden forman un ángulo obtuso.

Luego $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Dado el vector $\vec{u}(3,4)$, determinar:

a) Un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.

A partir de cualquier vector, podemos obtener uno con la misma dirección que tenga módulo1, simplemente dividiendo sus componentes por el módulo de dicho vector. Es decir:

Si $\vec{u} = (u_1, u_2) \rightarrow$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5 \rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

b) Un vector ortogonal a $\vec{u}$.

Si $\vec{v}$ es un vector ortogonal a $\vec{u}$, se verifica que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Para conseguir uno basta permutar sus componentes y cambiar una de las dos de signo.

Si $\vec{u} = (u_1, u_2) \rightarrow \vec{v} = (-u_2, u_1)$ ó $\vec{v} = (u_2, -u_1)$ es ortogonal a $\vec{u}$.

Luego dos vectores ortogonales a $\vec{u}$ son $\vec{v} = (-4, 3)$ ó $\vec{v} = (4, -3)$

c) Un vector ortonormal a $\vec{u}$.

Para obtenerlo basta dividir el vector ortogonal por su módulo.

Si $\vec{v} = (-4, 3) \rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5}(-4,3) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Si $\vec{v} = (4, -3) \rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5}(4,-3) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

6. Calcula m y n para que los vectores $\vec{u}(-3, n)$ y $\vec{v}(m, 6)$ sean ortogonales y $|\vec{u}| = 5$.

- Si $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow -3m + 6n = 0 \rightarrow m = 2n$
- Si $|\vec{u}| = 5 \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + n^2} = 5 \rightarrow 9 + n^2 = 25 \rightarrow n^2 = 16 \rightarrow n = \pm 4$
- Si $n = 4 \rightarrow m = 8$
- Si $n = -4 \rightarrow m = -8$
- Hay dos soluciones: $\vec{u}\ (-3, 4)$ y $\vec{v} = (8, 6)$ y $\vec{u}\ (-3, -4)$ y $\vec{v} = (-8, 6)$

7. Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcular k de modo que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$

- Si $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$

- Si $|\vec{u}| = \sqrt{34} \rightarrow |\vec{u}|^2 = 34 \rightarrow 5^2 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$

8. Dados los vectores $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(6, 2)$, hallar un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w}\cdot\vec{u} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{w}$.

- Sea $\vec{w} = (x, y)$
- $\vec{w}\cdot\vec{u} = 1 \rightarrow (x, y)\cdot(2, 1) = 1 \rightarrow 2x + y = 1$
- Si $\vec{v} \perp \vec{w} \rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \rightarrow (x, y)\cdot(6, 2) = 0 \rightarrow 6x + 2y = 0 \rightarrow 3x + y = 0$
- Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - y = -1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$
$$x = -1 \quad \rightarrow y = 3$$

- Por tanto: $\vec{w} = (-1, 3)$

9. Dado los siguientes puntos A(4, –2), B(1, 7), C(2, 4)

a) Hallar el simétrico del punto A respecto de C.

Buscamos un punto A´(x,y) que verifique: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA'}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA'} \rightarrow (-2,6) = (x - 2, y - 4)$

Igualando coordenadas, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -2 = x - 2 \\ 6 = y - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow A'(0, 10)$$

b) Calcular el punto medio, M, del segmento AB.

$$M = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{-2+7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

c) ¿Están alineados los tres puntos A, B y C? Razona tu respuesta.

Si tres puntos, A, B y C están alineados si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \rightarrow (-2, 6) = (1, -3) \rightarrow$ Son proporcionales: $\overrightarrow{AC} = -2\cdot\overrightarrow{BC}$

d) Calcular las coordenadas de un punto D de manera que se verifique $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AD}} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AD}} = \dfrac{1}{2} \rightarrow 2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \rightarrow 2\,(-3, 9) = (x - 4, y + 2) \rightarrow (-6, 18) = (x - 4, y + 2)$

- Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} -6 = x - 4 \\ 18 = y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 16 \end{cases} \rightarrow P(-2,16)$$

10. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,4) y C(-5,9), se pide:

a) Dibujarlo y demostrar analíticamente que es rectángulo en A

b) Calcular los otros dos ángulos.

c) Calcular su área.

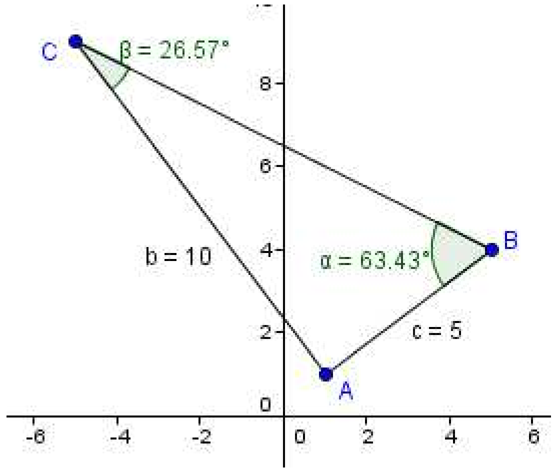
a) $\overrightarrow{AC} = (-6,8)$ $\quad \overrightarrow{AB} = (4,3)$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -24 + 24 = 0 \;\longrightarrow\; \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$$

b) $\overrightarrow{BC} = (-10,5) \;\longrightarrow\; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 40 - 15 = 25$

$$\cos B = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{5}} = 0{,}4472 \;\longrightarrow\; B = 63{,}43^{o}$$

Por tanto, C = 90º – 63,43º = 26,57º



c) $$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$$