

VECTORES

- Dos vectores \vec{u} y \vec{v} cumplen que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ y $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ$. Calcula:
 - $\vec{u} \cdot (-\vec{v})$
 - $(-2\vec{u}) \cdot (3\vec{v} + \vec{u})$
- Dados los vectores $\vec{a}(4, -1)$ y $\vec{b}(2, -3)$ calcula un vector \vec{u} perpendicular a \vec{b} tal que $\vec{a} \cdot \vec{u} = 10$.
- Dados los vectores $\vec{a}(3, 5)$ y $\vec{b}(4, -2)$ calcula un vector de la misma dirección que \vec{b} y cuyo módulo sea igual a la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} .
- Resuelve
 - Calcula m de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -2)$ y $\vec{b}(m, 5)$ sea igual a 5.
 - Calcula la proyección de \vec{a} sobre \vec{c} , siendo $\vec{c}(1, -3)$.
- Si $\vec{a}\left(\frac{1}{4}, -3\right)$ y $\vec{b}(4, 2)$, calcula:
 - Un vector unitario con la misma dirección y sentido que \vec{b} .
 - El ángulo formado por \vec{a} y \vec{b} .
- Considera dos vectores $\vec{x}(a, 3)$ e $\vec{y}(-1, b)$. Halla los valores de a y b para que \vec{x} e \vec{y} sean perpendiculares y que $|\vec{x}| = 5$.
- Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$ y $\vec{u} = -5\vec{v}$ calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$. (Recuerda que el ángulo entre u y v es de 180°)
- Prueba que si \vec{a} es perpendicular a \vec{b} entonces $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$.
- Dados los vectores $\vec{u}\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ y $\vec{v}(2, 3)$, calcula $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y (\vec{u}, \vec{v}) .
- Dados los vectores \vec{a} y \vec{b} tales que $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$ y el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b} es de 60° . Halla $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

SOLUCIONES

1. Dos vectores \vec{u} y \vec{v} cumplen que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ y $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ$. Calcula:

a) $\vec{u} \cdot (-\vec{v})$

b) $(-2\vec{u}) \cdot (3\vec{v} + \vec{u})$

Solución:

$$\text{a) } \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -5 \cdot 2 \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-2\vec{u}) \cdot (3\vec{v} + \vec{u}) &= (-2\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) + (-2\vec{u}) \cdot \vec{u} = -6\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} = -6(5\sqrt{2}) - 2 \cdot \underbrace{|\vec{u}|^2}_{1} \cdot \cos 0^\circ = \\ &= -30\sqrt{2} - 2 \cdot 5^2 = -30\sqrt{2} - 50 \approx -92,43 \end{aligned}$$

2. Dados los vectores $\vec{a}(4, -1)$ y $\vec{b}(2, -3)$ calcula un vector \vec{u} perpendicular a \vec{b} tal que $\vec{a} \cdot \vec{u} = 10$.

Solución:

Llamamos x, y a las coordenadas del vector \vec{u} .

Por ser \vec{u} y \vec{b} perpendiculares, su producto escalar es cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow (x, y) \cdot (2, -3) = 0 \rightarrow 2x - 3y = 0$$

$$\text{Además } \vec{a} \cdot \vec{u} = 10 \rightarrow (4, -1) \cdot (x, y) = 10 \rightarrow 4x - y = 10$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 0 \\ 4x - y = 10 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{r} -4x + 6y = 0 \\ \underline{4x - y = 10} \\ 5y = 10 \end{array} \rightarrow y = 2$$

$$4x - y = 10 \rightarrow 4x - 2 = 10 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3$$

El vector \vec{u} tiene como coordenadas $x = 3, y = 2 \rightarrow \vec{u}(3, 2)$.

3. Dados los vectores $\vec{a}(3, 5)$ y $\vec{b}(4, -2)$ calcula un vector de la misma dirección que \vec{b} y cuyo módulo sea igual a la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} .

Solución:

Un vector de la misma dirección que $\vec{b}(4, -2)$ será de la forma $\vec{v} = \lambda \vec{b} = (4\lambda, -2\lambda)$ siendo $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Calculamos la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} :

$$\text{proy}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(3, 5) \cdot (4, -2)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{12 - 10}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Entonces:

$$|\vec{v}| = \text{proy}_{\vec{b}} \vec{a} \rightarrow \sqrt{(4\lambda)^2 + (-2\lambda)^2} = \sqrt{16\lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{20\lambda^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow 2\sqrt{5}\lambda^2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{10}$$

$$\text{Así: } \vec{v}_1 \left(\frac{4}{10}, \frac{-2}{10} \right) \rightarrow \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5} \right)$$

$$\vec{v}_2 \left(\frac{-4}{10}, \frac{2}{10} \right) \rightarrow - \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

4. Resuelve

- a) Calcula m de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -2)$ y $\vec{b}(m, 5)$ sea igual a 5.
b) Calcula la proyección de \vec{a} sobre \vec{c} , siendo $\vec{c}(1, -3)$.

Solución:

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \rightarrow (3, -2) \cdot (m, 5) = 5 \rightarrow 3m + (-2) \cdot 5 = 5 \rightarrow 3m - 10 = 5 \rightarrow 3m = 15 \rightarrow m = 5$$

$$\text{b) } \text{proy}_{\vec{c}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{(3, -2) \cdot (1, -3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{3 \cdot 1 + (-2)(-3)}{\sqrt{10}} = \frac{3+6}{\sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$$

5. Si $\vec{a} = \left(\frac{1}{4}, -3\right)$ y $\vec{b} = (4, 2)$, calcula:

- Un vector unitario con la misma dirección y sentido que \vec{b} .
- El ángulo formado por \vec{a} y \vec{b} .

Solución:

a) Hallamos el módulo de \vec{b} :

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

El vector unitario con la misma dirección y sentido que \vec{b} será:

$$\left(\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}\right) = \left(\frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{2\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\left(\frac{1}{4}, -3\right) \cdot (4, 2)}{\sqrt{\frac{1}{16} + 9} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1 - 6}{\sqrt{\frac{145}{16}} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-5}{\frac{\sqrt{145}}{4} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{-5}{\frac{\sqrt{5^2 \cdot 29}}{2}} = \\ &= \frac{-5}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{29}} \approx -0,371 \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \approx 111,8^\circ \end{aligned}$$

6. Considera dos vectores $\vec{x}(a, 3)$ e $\vec{y}(-1, b)$. Halla los valores de a y b para que \vec{x} e \vec{y} sean perpendiculares y que $|\vec{x}| = 5$.

Solución:

1.º) Para que \vec{x} e \vec{y} sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero, es decir:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (a, 3) \cdot (-1, b) = -a + 3b = 0 \rightarrow b = \frac{a}{3}$$

2.º) Hallamos el módulo de \vec{x} e igualamos a 5:

$$\begin{aligned} |\vec{x}| &= \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{a^2 + 9} = 5 \rightarrow a^2 + 9 = 25 \rightarrow \\ \rightarrow a^2 &= 25 - 9 = 16 \rightarrow a = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} = 4 \rightarrow b = \frac{4}{3} \\ = -4 \rightarrow b = -\frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, hay dos posibilidades:

$$a_1 = 4, b_1 = \frac{4}{3}; a_2 = -4, b_2 = -\frac{4}{3}$$

7. Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$ y $\vec{u} = -5\vec{v}$ calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$. (Recuerda que el ángulo entre u y v es de 180°)

Solución:

Puesto que $\vec{u} = -5\vec{v}$, \vec{u} y \vec{v} son vectores que tienen la misma dirección pero sentido opuesto $\rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = -3|\vec{v}| \\ \vec{u} = -5\vec{v} &\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = (-5\vec{v}) \cdot \vec{v} = -5|\vec{v}|^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow -3|\vec{v}| = -|\vec{v}|^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5|\vec{v}|^2 - 3|\vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{v}|(5|\vec{v}| - 3) = 0 \rightarrow 5|\vec{v}| - 3 = 0 \rightarrow |\vec{v}| = \frac{3}{5}$$

$|\vec{v}| \neq 0$ puesto que $|\vec{u}| = 3 \neq 0$ y $\vec{u} = -5\vec{v}$

Por tanto: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3|\vec{v}| = -3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{-9}{5}$

8. Prueba que si \vec{a} es perpendicular a \vec{b} entonces $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$.

Solución:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

Por ser $\vec{a} \perp \vec{b}$, el producto escalar de \vec{a} y \vec{b} es cero $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Por tanto, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot 0 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$.

9. Dados los vectores $\vec{u} \left(-1, \frac{4}{3} \right)$ y $\vec{v} (2, 3)$, calcula $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ y (\vec{u}, \vec{v}) .

Solución:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Para calcular el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} aplicamos la definición de producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1 \cdot \frac{4}{3} + (-2) \cdot 3}{\frac{5}{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1 \cdot \frac{4}{3} - 6}{\frac{5}{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{\frac{4}{3} - 6}{\frac{5}{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{\frac{4 - 18}{3}}{\frac{5}{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-14}{5\sqrt{13}}$$

$$= \frac{(-1) \cdot 2 + \frac{4}{3} \cdot (-3)}{\frac{5}{3} \sqrt{13}} = \frac{-2-4}{\frac{5}{3} \sqrt{13}} = \frac{-6}{\frac{5}{3} \sqrt{13}} = \frac{-18}{5\sqrt{13}} = \frac{-18\sqrt{13}}{5 \cdot 13} = \frac{-18\sqrt{13}}{65} \approx -0,998$$

Luego $(\vec{u}, \vec{v}) \approx 176,82^\circ$.

10. Dados los vectores \vec{a} y \vec{b} tales que $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$ y el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b} es de 60° . Halla $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Solución:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Luego:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2^2 + 2 \cdot 6 + 6^2 = 4 + 12 + 36 = 52 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{52}$$

Análogamente:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2^2 - 2 \cdot 6 + 6^2 = 4 - 12 + 36 = 28 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$