EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO

1. Si A(-4, 5) B(1, 2) y C(6, 3) son tres vértices del paralelogramo ABCD, halla el 4º vértice D. ¿Cuál sería el resultado si se tratase del paralelogramo ACBD?

2. Halla el ángulo que forma la recta $y = \dfrac{10-5x}{8}$ con el eje de abscisas.

3. Dado el segmento de extremos A(3, 5) y B(6, 15), calcula las coordenadas de los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

4. Representa las rectas dadas por las ecuaciones: $a)\ y=-3$ $\quad b) \left.\begin{matrix} x=-t \\ y=1+t \end{matrix}\right\}$ $\quad c)\ x=5$ $\quad d)\ \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{2}$

5. Determina si los puntos A($-\frac{1}{2}$, 2) B(5, -1) y C(3, $-\frac{1}{3}$) están alineados.

6. Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto A(1, -8) y tiene igual pendiente que la recta $-x + y + 3 = 0$

7. Calcula el ángulo agudo que forman las rectas: $r \equiv y = \dfrac{3-5x}{6}$ $\quad r' \equiv \begin{cases} x=-1+2r \\ y=3-r \end{cases}$

8. Sin resolver los sistemas explica en cada apartado si las rectas son secantes, paralelas o coincidentes: $a) \left.\begin{matrix} 6x+2y-5=0 \\ 3x+y+7=0 \end{matrix}\right\}$ $\quad$ b) $\left.\begin{matrix} x+3y-4=0 \\ x-3y-5=0 \end{matrix}\right\}$ $\quad$ c) $\left.\begin{matrix} -x-y+3=0 \\ 2x+2y-6=0 \end{matrix}\right\}$

9. Determina el valor de m para que $3x + my - 7 = 0$ $\quad 4x + y - 14 = 0$ $\quad 7x + 2y - 28 = 0$ pertenezcan a un mismo haz de rectas

10. a) Halla las ecuaciones implícitas de las diagonales del cuadrilátero cuyos lados son las rectas:

    $x = 3 \qquad y - x = 0 \qquad y + x + 1 = 0 \qquad y + 2 = 0$

    b) Construye con Geogebra un gráfico con el cuadrilátero y sus diagonales y que muestre rotuladas sus ecuaciones.

11. Calcula el área del círculo circunscrito al triángulo que determina la recta $4x + 3y - 24 = 0$ con los ejes coordenados.

12. De todas las rectas paralelas a $y = \dfrac{2-4x}{3}$ escribe la ecuación explícita de aquellas que distan 2 unidades del punto (1, 1)

13. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas $3x - y - 1 = 0$, $-6x + 2y - 8 = 0$.

14. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que distan triple de la recta $2x + y - 3 = 0$ que de la recta $2x + 4y - 6 = 0$

15. Halla el área del triángulo de vértices A(-3, -4) B(-2, 1) y C(4, -1)

16. Halla por intersección de las medianas, las coordenadas del baricentro del triángulo cuyos vértices son: A(-4, 2) B(1, 7) y C(5, -2)

17. Halla el ortocentro del triángulo de vértices A(-2, -1) B(0, 1) y C(5, 0)

18. Halla el circuncentro del triángulo de vértices A(-1, 1) B(1, 2) y C(2, -2)

19. Calcula el incentro del triángulo cuyos lados están contenidos en las rectas:

$y - 4 = 0 \qquad 3x + 4y - 24 = 0 \qquad 4x + 3y + 24 = 0.$

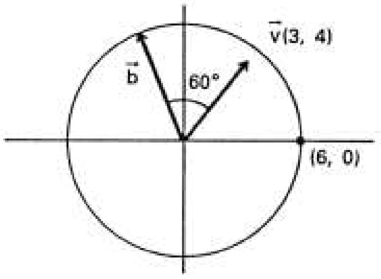
20. Dados los vectores $\vec{a} = (3, -4)$ y $\vec{b} = (5, x)$ calcula x para que:

a) Sean paralelos b) Sean perpendiculares c) Formen un ángulo de 60º

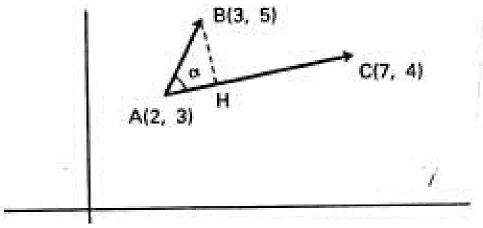
21. Si $\vec{a}\cdot\vec{b} = 16$, $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 12$ calcula: a) $(3\vec{a} - \vec{b})^2$ b) $(4\vec{a} + 5\vec{b})\cdot(4\vec{a} - 5\vec{b})$

22. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que: $|\vec{a}+\vec{b}| = 8$ y $|\vec{a}-\vec{b}| = 6$ calcula el producto escalar: $\vec{a}\cdot\vec{b}$

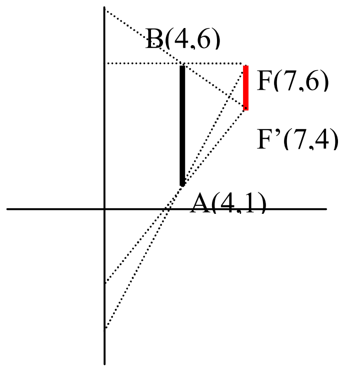
23. Calcula las componentes del vector $\vec{b}$



24. Halla α, la distancia AH y las coordenadas de H



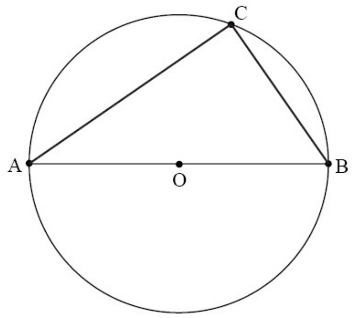
25. El segmento **FF'** es un filamento luminoso. La luz emitida se encuentra con el segmento **AB** que, al ser opaco, produce sobre el eje Y una zona de sombra y dos de penumbra. ¿Cuánto miden cada una de ellas?



26. En la siguiente figura, [AB] representa el diámetro del círculo con centro en O. El punto C está situado sobre la circunferencia del círculo. Sean $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

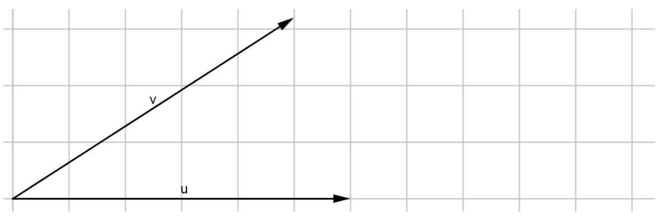
a) Halle una expresión para $\overrightarrow{CB}$ y otra para $\overrightarrow{AC}$, en función de $\vec{b}$ y de $\vec{c}$.

b) A partir de lo anterior, demuestre que $A\hat{C}B$ es un ángulo recto.



27. Dado el vector $\vec{v} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$, halla los dos vectores paralelos y los dos vectores perpendiculares cuyo módulo sea 15.

28. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del diagrama:
a) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$
b) Calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}$



29. Tres vectores no nulos distintos entre sí vienen dados por $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Si $\overrightarrow{OA}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{OB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{CA}$, compruebe que $\overrightarrow{OC}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$

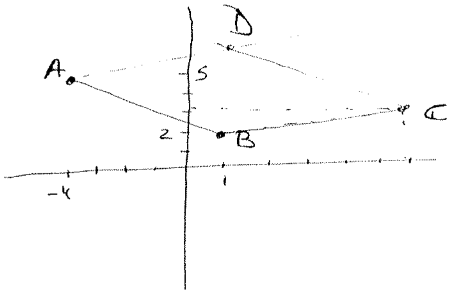
(1) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{D = (1, 6)}$

$\vec{CB} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{D = (-9, 4)}$



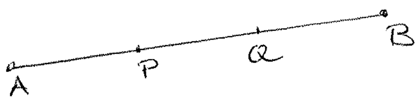
(2) $y = \dfrac{10-5x}{8} \longrightarrow m = -\dfrac{5}{8} \Rightarrow tg\,\alpha = -\dfrac{5}{8} \Rightarrow \alpha \simeq -32^\circ \equiv \boxed{148^\circ}$

(3) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 15-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

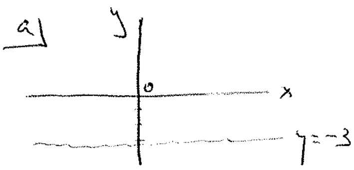
$\vec{OP} = \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 10/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 25/3 \end{pmatrix}$

$\vec{OQ} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 35/3 \end{pmatrix}$

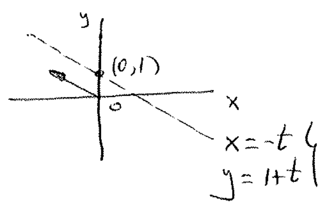
$\boxed{P(4, \frac{25}{3})}$ $\boxed{Q(5, \frac{35}{3})}$



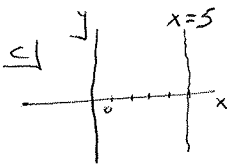
(4) a)



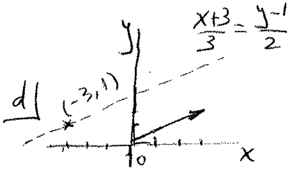
b)



c)



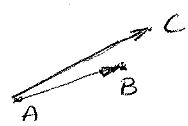
d)



(5) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5+1/2 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ pendiente $= \dfrac{-3}{11/2} = -\dfrac{6}{11}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3+1/2 \\ -1/3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -7/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ pendiente $= \dfrac{-7/3}{7/2} = -\dfrac{2}{3}$

Al ser distintas no están alineados



(6) $-x+y+3=0 \rightarrow y = x-3 \rightarrow$ pendiente $= 1 \longrightarrow y+8 = 1\cdot(x-1)$; $\boxed{-x+y+9=0}$

También: $-x+y+C=0$; $-1-8+C=0 \Rightarrow C=9 \rightarrow -x+y+9=0$ ✓

(7) $y = \dfrac{3-5x}{6} \Rightarrow m_1 = -\dfrac{5}{6} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} x = -1+2r \\ y = 3-r \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\cos\theta = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{12+5}{\sqrt{36+25}\sqrt{4+1}} = \dfrac{17}{\sqrt{305}} \Rightarrow \boxed{\theta = 13^\circ}$

También: $\left.\begin{array}{l} m_1 = -5/6 \\ m_2 = -1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\theta = \dfrac{-1/2 + 5/6}{1 + \frac{-5}{6}\cdot\frac{-1}{2}} = \dfrac{2/6}{1+5/12} = \dfrac{4}{17} \Rightarrow \theta = 13^\circ$ ✓

(8) a) $\left.\begin{array}{l} 6x+2y-5=0 \\ 3x+y+7=0 \end{array}\right\}$ $\dfrac{6}{3} = \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-5}{7} \Rightarrow$ PARALELAS

b) $\left.\begin{array}{l} x+3y-4=0 \\ x-3y-5=0 \end{array}\right\}$ $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-3} \Rightarrow$ SECANTES

c) $\left.\begin{array}{l} -x-y+3=0 \\ 2x+2y-6=0 \end{array}\right\}$ $-\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{-6} \Rightarrow$ COINCIDENTES

(9)

$$\left.\begin{array}{l}4x+y-14=0\\7x+2y-28=0\end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{r}8x+2y-28=0\\7x+2y-28=0\\\hline \boxed{x\qquad=0}\end{array} \longrightarrow \boxed{y=14} \qquad P(0,14)$$

$$(0,14)\in 3x+my-7=0 \implies 0+14m-7=0 \implies \boxed{m=\tfrac{1}{2}}$$

(10)

$r_1 \equiv x=3$

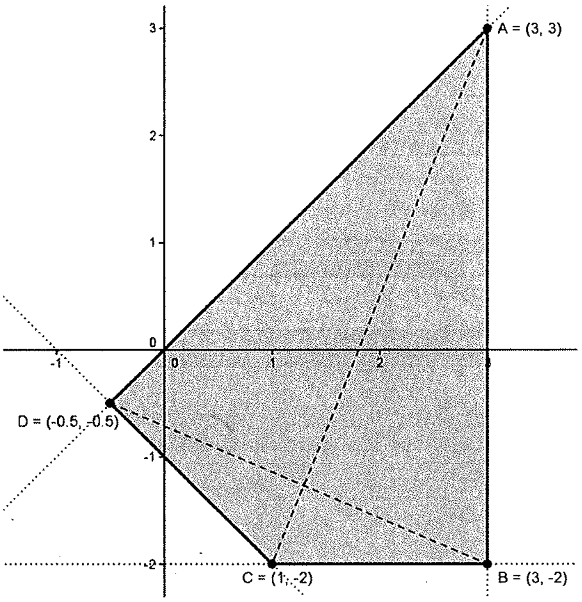
$r_2 \equiv y-x=0$

$r_3 \equiv y+x+1=0$

$r_4 \equiv y+2=0$

$$\left.\begin{array}{l}r_1\\r_2\end{array}\right\}\Rightarrow (3,3) \qquad \left.\begin{array}{l}r_1\\r_3\end{array}\right\}\Rightarrow \cancel{(3,-4)} \qquad \left.\begin{array}{l}r_1\\r_4\end{array}\right\}\Rightarrow (3,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l}r_2\\r_3\end{array}\right\}\Rightarrow \left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right) \qquad \left.\begin{array}{l}r_2\\r_4\end{array}\right\}\Rightarrow \cancel{(-2,-2)} \qquad \left.\begin{array}{l}r_3\\r_4\end{array}\right\}\Rightarrow (1,-2)$$



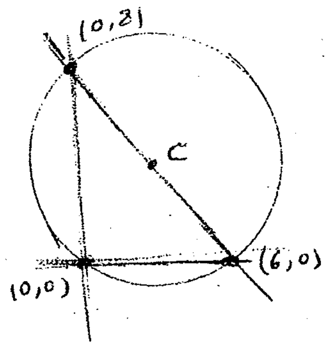
$$\vec{AC} = (-2,-5) \qquad \frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{5} \longrightarrow \boxed{y=\frac{5x-9}{2}}$$

$$\vec{DB} = \left(3+\tfrac{1}{2}, -2+\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{7}{2}, -\tfrac{3}{2}\right) \qquad \frac{x-3}{7}=\frac{y+2}{-3}$$

$$\boxed{y=\frac{-3x-5}{7}}$$

$$\boxed{\text{Diagonales: } \begin{array}{l}-5x+2y+9=0\\3x+7y+5=0\end{array}}$$

(11)



$$4x+3y-24=0 \qquad \begin{array}{lll}x=0 \implies y=8 & (0,8)\\ y=0 \implies x=6 & (6,0)\end{array}$$

Como es un Triángulo Rectángulo, el punto medio es el centro de la circunferencia: $C(3,4)$

$$R=\sqrt{3^2+4^2}=5 \qquad \boxed{\text{Area} = 25\pi \text{ u.s.}}$$

(12)

$$y=\frac{2-4x}{3} \longrightarrow 3y=2-4x \longrightarrow 4x+3y-2=0$$

$$4x+3y+C=0$$

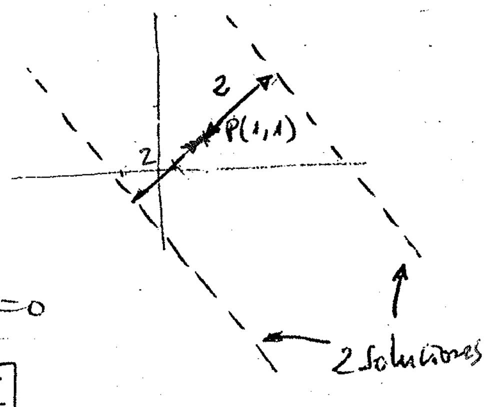
$$2=\frac{|4+3+C|}{\sqrt{16+9}} \implies |7+C|=10$$

$7+C=10$ | $7+C=-10$

$\boxed{C=3}$ | $\boxed{C=-17}$

$4x+3y+3=0$ | $4x+3y-17=0$

$\boxed{y=\frac{-4x-3}{3}}$ | $\boxed{y=\frac{17-4x}{3}}$



(13) $\frac{|3x-y-1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-6x+2y-8|}{\sqrt{36+4}}$; $\frac{3x-y-1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{-6x+2y-8}{\sqrt{40}}$; $\frac{3x-y-1}{\cancel{\sqrt{10}}} = \pm\frac{-6x+2y-8}{2\cancel{\sqrt{10}}}$;

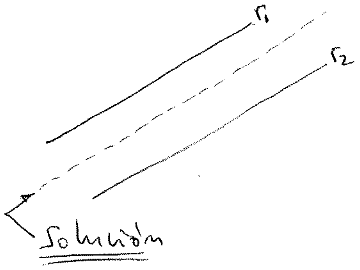
$3x-y-1 = \pm(-3x+y-4)$

$3x-y-1=-3x+y-4$

$\boxed{6x-2y+3=0}$

$\cancel{3x}-\cancel{y}-1=\cancel{3x}-\cancel{y}+4$

Absurdo



Al ser paralelas las rectas dadas, sólo habrá una recta solución que será también paralela.

(14) $\frac{|2x+y-3|}{\sqrt{4+1}} = 3\,\frac{|2x+4y-6|}{\sqrt{4+16}}$; $\frac{2x+y-3}{\sqrt{5}} = \pm3\,\frac{2x+4y-6}{\sqrt{20}}$; $\frac{2x+y-3}{\cancel{\sqrt{5}}} = \pm3\,\frac{2x+4y-6}{2\cancel{\sqrt{5}}}$;

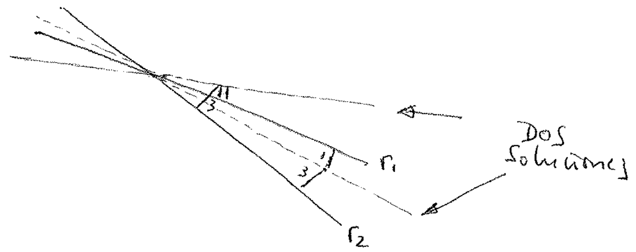
$2x+y-3 = \pm(3x+6y-9)$

$2x+y-3=3x+6y-9$

$\boxed{0=x+5y-6}$

$2x+y-3=-3x-6y+9$

$\boxed{5x+7y-12=0}$



(15) Base

$\vec{AC} = \begin{pmatrix}4+3\\-1+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

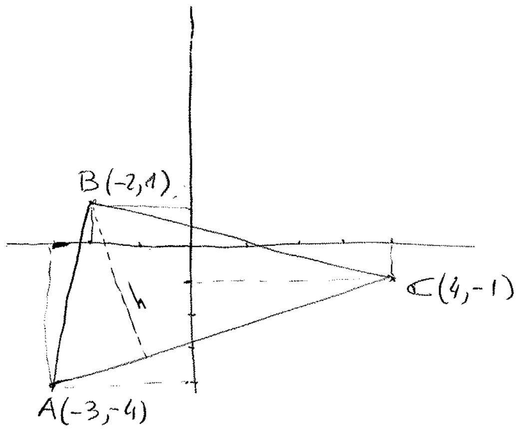
Ecuación Base

$\vec{AC} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} \to m = \frac{3}{7}$

$y+1 = \frac{3}{7}(x-4)$

$7y+7 = 3x-12$

$-3x+7y+19=0$



Altura

$h = d(B\,;\,AC) = \frac{|-3\cdot(-2)+7\cdot1+19|}{\sqrt{9+49}} = \frac{32}{\sqrt{58}}$

$\text{Área} = \frac{\cancel{\sqrt{58}}\cdot\frac{32}{\cancel{\sqrt{58}}}}{2} = \boxed{16 \text{ u.s.}}$

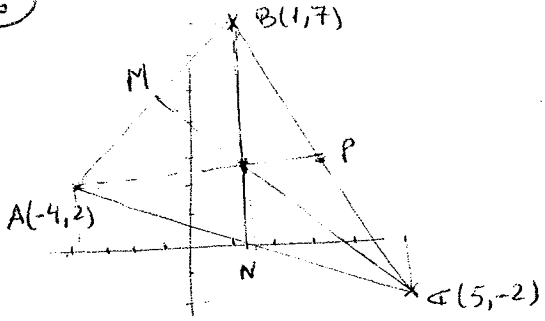
También

$\cos\hat{A} = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}}{\left|\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right|\;\left|\begin{matrix}7\\3\end{matrix}\right|} = \frac{7+15}{\sqrt{1+25}\,\sqrt{49+9}} = \frac{22}{\sqrt{1508}}$

$\sin\hat{A} = \sqrt{1-\left(\frac{22}{\sqrt{1508}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1024}{1508}} = \frac{32}{\sqrt{1508}}$

$\text{Área} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\hat{A}}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{58}}\cdot\cancel{\sqrt{26}}\cdot 32/\cancel{\sqrt{1508}}}{2} = 16$ ✓

(16)



$M = \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

$\vec{MC} = \left(5+\frac{3}{2}, -2-\frac{9}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}, -\frac{13}{2}\right) \rightarrow$ Pend $= -1$

Mediana vértice C : $y+2 = -1(x-5)$ $\boxed{y = 3-x}$

$N = (1/2, 0)$

$\vec{BN} = \left(\frac{1}{2}-1, 0-7\right) = \left(-\frac{1}{2}, -7\right) \rightarrow$ Pend $= 14$

Mediana vértice B : $y-7 = 14(x-1)$ $\boxed{y = 14x-7}$

$P = (3, 5/2)$

$\vec{AP} = \left(3+4, \frac{5}{2}-2\right) = \left(7, \frac{1}{2}\right) \rightarrow$ Pend $= \frac{1}{14}$

Mediana vértice C : $y-2 = \frac{1}{14}(x+4)$ $\boxed{y = \frac{x+32}{14}}$

$\left.\begin{array}{l} y = 3-x \\ y = 14x-7 \end{array}\right\} \rightarrow 3-x = 14x-7$

$-15x = -10$

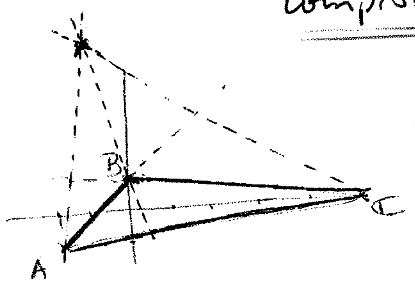
$x = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$y = 3-\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

$\boxed{\text{Baricentro} = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)}$

Comprobación : $x = \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2/3+32}{14} = \frac{7}{3}$ ✓

(17)



A(-2,-1)
B(0,1)
C(5,0)

$\vec{AB} = (2, 2) \rightarrow$ Pend $= 1$

Altura vértice C : $y = -(x-5)$ $\boxed{y = -x+5}$

$\vec{AC} = (7,1) \rightarrow$ Pend $= \frac{1}{7}$

Altura vértice B : $y-1 = -7x$ $\boxed{y = 1-7x}$

$\vec{BC} = (5,-1) \rightarrow$ Pend $= -\frac{1}{5}$

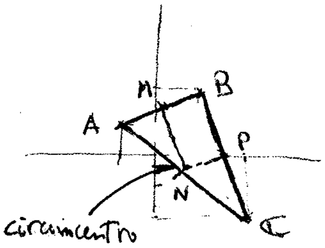
Altura vértice A : $y+1 = 5(x+2)$ $\boxed{y = 5x+9}$

$\left.\begin{array}{l} y = -x+5 \\ y = 1-7x \end{array}\right\}$ $-x+5 = 1-7x$; $6x = -4$ $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}+5 = \frac{17}{3}$

$\boxed{\text{Ortocentro} \left(-\frac{2}{3}, \frac{17}{3}\right)}$

Comprobación : $x = -\frac{2}{3} \rightarrow y = 5 \cdot \frac{-2}{3}+9 = \frac{17}{3}$ ✓

(18)



A(-1,1)
B(1,2)
C(2,-2)

Comprobación : $x = \frac{5}{6} \rightarrow y = \frac{2 \cdot \frac{5}{6}-3}{8} = -\frac{1}{6}$ ✓

$M = \left(0, \frac{3}{2}\right)$

$\vec{AB} = (2,1) \rightarrow$ Pend $= \frac{1}{2}$

Mediatriz lado $\overline{AB}$: $y-\frac{3}{2} = -2x$ $\boxed{y = \frac{3}{2}-2x}$

$N = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\vec{AC} = (3,-3) \rightarrow$ Pend $= -1$

Mediatriz lado $\overline{AC}$: $y+\frac{1}{2} = 1 \cdot \left(x-\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{y = x-1}$

$P = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$\vec{BC} = (1,-4) \rightarrow$ Pend $= -4$

Mediatriz lado $\overline{BC}$: $y = \frac{1}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)$ $\boxed{y = \frac{2x-3}{8}}$

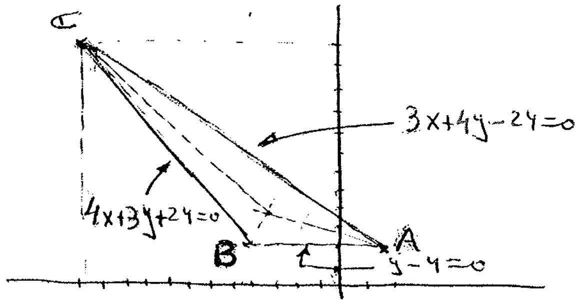
$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{2}-2x \\ y = x-1 \end{array}\right\}$ $x-1 = \frac{3}{2}-2x$; $3x = \frac{5}{2}$ $x = \frac{5}{6} \Rightarrow y = \frac{5}{6}-1 = -\frac{1}{6}$ $\boxed{\text{Circuncentro} \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}\right)}$

19

$$\left.\begin{array}{l} y-4=0 \\ 3x+4y-24=0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=\frac{8}{3} \\ y=4 \end{array}} \quad A\left(\tfrac{8}{3},4\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y-4=0 \\ 4x+3y+24=0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=-9 \\ y=4 \end{array}} \quad B(-9,4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x+4y-24=0 \\ 4x+3y+24=0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=-24 \\ y=24 \end{array}} \quad C(-24,24)$$



$$\frac{|y-4|}{1}=\frac{|3x+4y-24|}{5} \quad \begin{cases} y-4=\dfrac{3x+4y-24}{5} \rightarrow 5y-20=3x+4y-24 \rightarrow \cancel{y=3x-4} \\ y-4=-\dfrac{3x+4y-24}{5} \rightarrow 5y-20=-3x-4y+24 \rightarrow \boxed{y=\dfrac{-3x+44}{9}} \end{cases}$$

$$\frac{|y-4|}{1}=\frac{|4x+3y+24|}{5} \quad \begin{cases} y-4=\dfrac{4x+3y+24}{5} \rightarrow 5y-20=4x+3y+24 \rightarrow \boxed{y=2x+22} \\ y-4=-\dfrac{4x+3y+24}{5} \rightarrow 5y-20=-4x-3y-24 \rightarrow \cancel{y=\dfrac{-x-1}{2}} \end{cases}$$

$$\frac{|3x+4y-24|}{5}=\frac{|4x+3y+24|}{5} \quad \begin{cases} 3x+4y-24=4x+3y+24 \rightarrow \cancel{y=x+48} \\ 3x+4y-24=-4x-3y-24 \rightarrow \boxed{y=-x} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=2x+22 \\ y=-x \end{array}\right\} \rightarrow 2x+22=-x \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=-\frac{22}{3} \\ y=\frac{22}{3} \end{array}} \qquad \boxed{\text{Incentro } \left(-\tfrac{22}{3}, \tfrac{22}{3}\right)}$$

Comprobación: $x=-22/3 \rightarrow y=\dfrac{-3\cdot\frac{22}{3}+44}{9}=\dfrac{22}{3}$ ✓

20

$\vec{a}(3,-4)$
$\vec{b}(5,x)$

a) $\vec{a}\parallel\vec{b} \Longrightarrow \dfrac{5}{3}=\dfrac{x}{-4} \Longrightarrow \boxed{x=-\dfrac{20}{3}}$

b) $\vec{a}\perp\vec{b} \Longrightarrow (3,-4)\cdot(5,x)=0 \Longrightarrow 15-4x=0 \Longrightarrow \boxed{x=\dfrac{15}{4}}$

c) $\alpha=60^\circ \Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 60^\circ$

$$15-4x=\sqrt{9+16}\,\sqrt{25+x^2}\cdot\frac{1}{2}$$

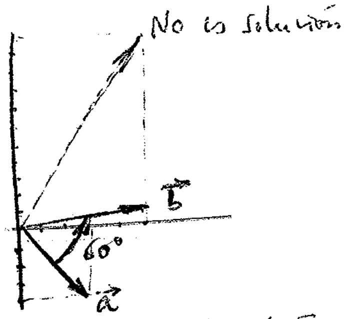
$$30-8x=5\sqrt{25+x^2}$$

$$(30-8x)^2=25(25+x^2)$$

$$900-480x+64x^2=625+25x^2$$

$$39x^2-480x+275=0$$

$$x=\frac{480\pm\sqrt{480^2-4\times39\times275}}{78}=\frac{480\pm250\sqrt{3}}{78}=\frac{240\pm125\sqrt{3}}{39} \begin{array}{l} \nearrow \cancel{11'71} \\ \searrow \boxed{0'602} \end{array}$$



Otro método: $(3-4i)\cdot 1_{60^\circ}=(3-4i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)+i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-2\right)$

El vector $(5,x)$ debe ser paralelo a $\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}-2\right)$ luego:

$$\frac{5}{\frac{3}{2}+2\sqrt{3}}=\frac{x}{\frac{3\sqrt{3}}{2}-2} \Longrightarrow$$

$$x=\frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}-10}{\frac{3}{2}+2\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}-20}{3+4\sqrt{3}}=\frac{(15\sqrt{3}-20)(3-4\sqrt{3})}{(3+4\sqrt{3})(3-4\sqrt{3})}=\frac{45\sqrt{3}-180-60+80\sqrt{3}}{9-48}=\frac{125\sqrt{3}-240}{-39}=\boxed{\frac{240-125\sqrt{3}}{39}}$$ ✓

21) $\vec a\cdot\vec b = 16 \qquad |\vec a| = 2 \qquad |\vec b| = 12$

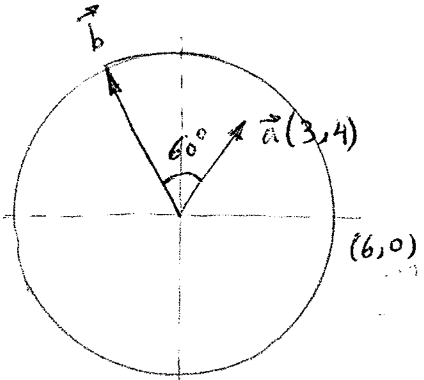
$$(3\vec a-\vec b)^2 = 9\,\vec a\cdot\vec a - 6(\vec a\cdot\vec b) + \vec b\cdot\vec b = 9|\vec a|^2 - 6(\vec a\cdot\vec b) + |\vec b|^2 = 36 - 96 + 144 = \boxed{84}$$

$$(4\vec a+5\vec b)(4\vec a-5\vec b) = 16\,\vec a\cdot\vec a - \cancel{20\,\vec a\cdot\vec b} + \cancel{20\,\vec b\cdot\vec a} - 25\,\vec b\cdot\vec b =$$
$$= 16|\vec a|^2 - 25|\vec b|^2 = 16\cdot4 - 25\cdot144 = \boxed{-3536}$$

22)

$$|\vec a+\vec b| = 8 \Rightarrow (\vec a+\vec b)(\vec a+\vec b) = 64 \Rightarrow \vec a\cdot\vec a + 2\vec a\cdot\vec b + \vec b\cdot\vec b = 64$$
$$|\vec a-\vec b| = 6 \Rightarrow (\vec a-\vec b)(\vec a-\vec b) = 36 \Rightarrow \vec a\cdot\vec a - 2\vec a\vec b + \vec b\vec b = 36$$
$$4\,\vec a\cdot\vec b = 28$$
$$\boxed{\vec a\cdot\vec b = 7}$$

23)



$\vec b = (b_1, b_2)$

$\vec a\cdot\vec b = |\vec a|\,|\vec b|\cos 60°$

$3b_1 + 4b_2 = 5\cdot6\cdot\frac{1}{2}$

$3b_1 + 4b_2 = 15 \rightarrow b_2 = \frac{15-3b_1}{4}$

$b_1^2 + b_2^2 = 36$

$$b_1^2 + \frac{(15-3b_1)^2}{16} = 36 \quad ; \quad 16b_1^2 + 225 - 90b_1 + 9b_1^2 = 576$$
$$25b_1^2 - 90b_1 - 351 = 0$$

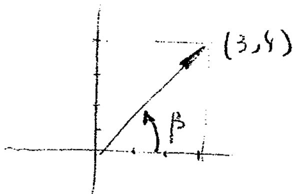
$$b_1 = \frac{90 \pm \sqrt{8100+35100}}{50} = \frac{90\pm10\sqrt{432}}{50} = \frac{90\pm120\sqrt3}{50} = \frac{9\pm12\sqrt3}{5}$$

Como $\vec b$ pertenece al 2° cuadrante, escojo la solución negativa:

$$\boxed{b_1 = \frac{9-12\sqrt3}{5}} \Rightarrow b_2 = \frac{15 - 3\,\frac{9-12\sqrt3}{5}}{4} = \frac{75-27+36\sqrt3}{20} =$$
$$= \frac{48+36\sqrt3}{20} = \boxed{\frac{12+9\sqrt3}{5}}$$

$$\boxed{\vec b = \left(\frac{9-12\sqrt3}{5}, \frac{12+9\sqrt3}{5}\right)} = \boxed{(-2'357\,,\,5'518)}$$

Otra forma:



$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta = 53{,}13°$$

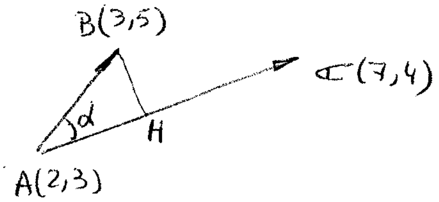
Hay que girar $6+0i$ un ángulo de $60 + 53{,}13° = 113{,}13°$

$$b_1 + i b_2 = (6+0i)\cdot 1_{113{,}13°} = 6\,(\cos 113{,}13° + i \operatorname{sen} 113{,}13°) =$$
$$= -2'357 + i\,5'518$$

$$\boxed{\vec b = (-2'357,\, 5'518)}$$

Otra forma:
$$\vec b = (3+4i)\cdot\left(\frac{6}{5}\right)_{60°} = (3+4i)\cdot\frac{6}{5}(\cos60° + i\operatorname{sen}60°) = \frac{6}{5}(3+4i)\left(\frac12 + \frac{\sqrt3}{2}i\right) =$$
$$= \frac{6}{5}\left(\frac32 + \frac{3\sqrt3}{2}i + \frac42 i - \frac{4\sqrt3}{2}\right) = \frac35\left(3-4\sqrt3 + i(3\sqrt3+4)\right) \Rightarrow \boxed{\vec b = \left(\frac{9-12\sqrt3}{5}, \frac{9\sqrt3+12}{5}\right)}$$

(24)



$\vec{AB} = (1,2)$
$\vec{AC} = (5,1)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = |\vec{AB}|\,|\vec{AC}| \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{(1,2)(5,1)}{\sqrt{1+4}\sqrt{25+1}} = \frac{7}{\sqrt{130}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 52^{o}}$$

$$\overline{AH} = \overline{AB}\cdot\cos\alpha = \sqrt{1+4}\cdot\frac{7}{\sqrt{130}} = \boxed{\frac{7}{\sqrt{26}}} = 1'373$$

$$H = A + \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}\vec{AC} = (2,3) + \frac{7/\sqrt{26}}{\sqrt{26}}(5,1) = (2,3) + \frac{7}{26}(5,1) =$$

$$= \left(2+\frac{35}{26},\ 3+\frac{7}{26}\right) = \boxed{\left(\frac{87}{26},\ \frac{85}{26}\right)} = (3'346,\ 3'269)$$

Otro método:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{1} \\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{-5} \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x-2 = 5y-15 \\ -5x+15 = y-5 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x-5y+13=0 \\ -5x-y+20=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 5x-25y+65=0 \\ -5x-y+20=0 \end{array}\right\}$$

$$-26y+85=0$$

$$\boxed{y = \frac{85}{26}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{87}{26}}$$

(25)

Recta $\overline{BF'}$

$\vec{BF'} = (3,-2) \rightarrow m = -\frac{2}{3}$

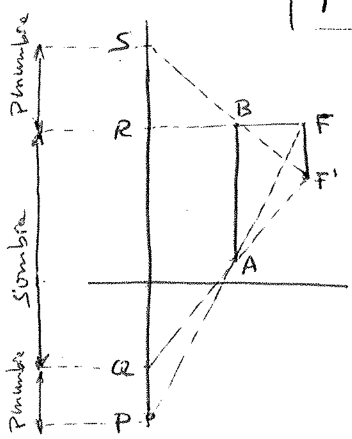
$y-6 = -\frac{2}{3}(x-4)$

$3y-18 = -2x+8$

$y = \frac{26-2x}{3}$

$x=0 \Rightarrow y = \frac{26}{3}$ $\boxed{S\left(0,\frac{26}{3}\right)}$

$\boxed{R(0,6)}$



Recta $\overline{AF}$

$\vec{AF} = (3,5) \rightarrow m = \frac{5}{3}$

$y-1 = \frac{5}{3}(x-4)$

$3y-3 = 5x-20$

$y = \frac{5x-17}{3}$

$x=0 \rightarrow y = \frac{-17}{3}$ $\boxed{P\left(0,-\frac{17}{3}\right)}$

Recta $\overline{AF'}$

$\vec{AF'} = (3,3) \rightarrow m=1$

$y-1 = 1\cdot(x-4)$

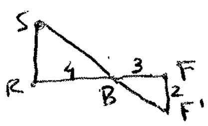
$y = x-3$

$x=0 \rightarrow y=-3$ $\boxed{Q(0,-3)}$

Sombra $= 6+3 = \boxed{9 \text{ unidades}}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Penumbra}_1 = \dfrac{26}{3} - 6 = \dfrac{8}{3} \\ \text{Penumbra}_2 = \dfrac{17}{3} - 3 = \dfrac{8}{3} \end{array}\right\} \text{Penumbra} = \frac{8}{3}+\frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3} \text{ unidades}}$$

Otro método (Tales):



$$\frac{RS}{4} = \frac{2}{3} \rightarrow \overline{RS} = \frac{8}{3} \checkmark$$

(26) a) $\vec{CB} = \boxed{\vec{b} - \vec{c}}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{OB} = \boxed{\vec{b} + \vec{c}}$

porque AB es un diámetro

b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = (\vec{b} + \vec{c})(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - \cancel{\vec{b}\cdot\vec{c}} + \cancel{\vec{c}\cdot\vec{b}} - \vec{c}\cdot\vec{c} =$

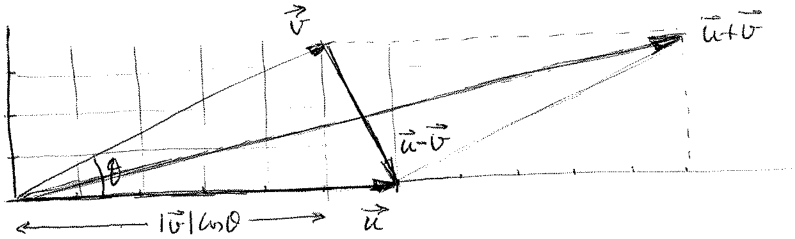
$= |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = R^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{CB} \Rightarrow \boxed{\angle C = 90^\circ}$

(27) $\vec{v} = 6\vec{i} - 8\vec{j} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \longrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{36+64} = 10$

Vectores Paralelos: $\pm \frac{15}{10}\vec{v} = \pm \frac{3}{2}\vec{v} = \pm \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{cases} \boxed{9\vec{i} - 12\vec{j}} \\ \boxed{-9\vec{i} + 12\vec{j}} \end{cases}$

Vectores Perpendiculares $\pm \frac{15}{10}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \pm \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{cases} \boxed{12\vec{i} + 9\vec{j}} \\ \boxed{-12\vec{i} - 9\vec{j}} \end{cases}$

(28)



b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta = 6\cdot 5 = \boxed{30}$

(29) $\vec{OA} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0 \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{OB} \perp \vec{CA} \Rightarrow \vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c}) = 0 \rightarrow \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \quad +$

$\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \Rightarrow (\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{BA}\cdot\vec{OC} = 0$ ✓