2 Coordenadas de un vector

Página 175

1 **Si $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(1, -4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:**

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} - \vec{v}$ **c)** $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ **d)** $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

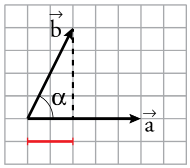
a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

1 **¿Verdadero o falso?**

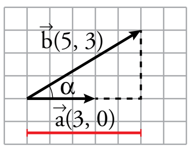


Demostramos que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$:

$$\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{2}{|\vec{b}|} \Rightarrow |\vec{b}|\ cos\ \alpha = 2}$$

$$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ cos\ \alpha = 5 \cdot 2 = 10}$$

Verdadero. Partimos de la longitud de la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ y de su expresión en relación con el producto escalar de dos vectores para calcular el producto escalar de dichos vectores.

2 

Observando el razonamiento del ejercicio anterior, calcula $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}|\,cos\ \alpha = 5 \to \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\,cos\ \alpha = 3 \cdot 5 = 15$$

3 **Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30°$. Calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $\vec{v} \cdot \vec{u}$ **c)** $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v})$ **e)** $\vec{u} \cdot \vec{u}$ **f)** $\vec{v} \cdot (-\vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot cos\ 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$

c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3\sqrt{3}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v}) = 3(-5)(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -15 \cdot 3\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2\ cos\ 0° = 16$

f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{v} = -|\vec{v}|^2 = -\frac{9}{4}$

4 **Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, averigua el ángulo $(\vec{u}, \vec{v})$. (Usa la calculadora).**

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15} \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 97°\ 39'\ 44'$$

6 **Las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto a una base ortonormal son $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(-1, 3)$. Halla:**

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ y $\vec{v} \bullet \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

c) El valor de k para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$.

d) Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (3, -4) \bullet (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \bullet \vec{u} = (-1, 3) \bullet (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-15}{5\sqrt{10}} = -0{,}9486832981 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 161°\ 33'\ 54''$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \;\rightarrow\; (4, k) \bullet (-1, 3) = 0 \;\rightarrow\; -4 + 3k = 0 \;\rightarrow\; k = \dfrac{4}{3}$

Para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$, ha de ser $k = \dfrac{4}{3}$.

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}(3, -4)$ es, por ejemplo, (4, 3).

Un vector unitario paralelo a (4, 3) es $\dfrac{1}{|(4, 3)|} \cdot (4, 3) = \dfrac{1}{5}(4, 3) = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

Hay dos vectores unitarios perpendiculares a (3, –4), son $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ y $\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

1. Producto escalar en bases no ortonormales

Hazlo tú. **Calcula el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, siendo $\vec{a}(0, 3)$ y $\vec{b}(-1, 1)$ sus coordenadas respecto a la base *B*.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u}) + 3\vec{v} \cdot \vec{v} = -3\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\,|\vec{v}|^2 = -9+27=18$$

1. Obtención de vectores paralelos y perpendiculares a uno dado

Dado el vector $\vec{v}(9, 12)$, calcular las coordenadas de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}$, unitario y de la misma dirección que el vector $\vec{v}$.

b) $\vec{w}$, ortogonal al vector $\vec{v}$ y del mismo módulo.

c) $\vec{z}$, de módulo 5 y ortogonal a $\vec{v}$.

a) $|\vec{v}| = \sqrt{81+144} = 15$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{15}(9, 12) = \left(\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Otra solución: $\vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{w}_1 = (-12, 9)$

Otra solución: $\vec{w}_2 = (12, -9)$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{144+81} = 15$

$$\vec{z}_1 = 5 \cdot \frac{1}{15}(-12, 9) = (-4, 3)$$

$$\vec{z}_2 = 5 \cdot \frac{1}{15}(12, -9) = (4, -3)$$

3. Determinación de parámetros para que un vector cumpla ciertas condiciones

Sean los vectores $\vec{a}(3, n)$ y $\vec{b}(-2, m)$. Calcular el valor de los parámetros n y m en cada uno de los siguientes casos, para que se cumpla:

a) $|\vec{a}| = 5$

b) $\vec{a} \perp \vec{b}$ ***y*** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

c) $\vec{a}$ ***forme un ángulo de 45° con el vector*** $\vec{u} = (1, 1)$.

a) $|\vec{a}| = \sqrt{9+n^2} = 5 \;\rightarrow\; 9 + n^2 = 25 \;\rightarrow\; n = -4,\; n = 4$

b) $\begin{cases} \vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6 + nm = 0 \\ \sqrt{9+n^2} = \sqrt{4+m^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6 + nm = 0 \\ 9 + n^2 = 4 + m^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{6}{n} \\ 9 + n^2 = 4 + \left(\dfrac{6}{n}\right)^2 \end{cases}$

Soluciones: $n = -2,\; m = -3;\;\; n = 2,\; m = 3$

c) $\vec{a} \bullet \vec{v} = |\vec{a}|\,|\vec{v}| \cos 45° = |\vec{a}|\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = |\vec{a}| = \sqrt{9+n^2}$

$\vec{a} \bullet \vec{v} = (3, n) \bullet (1, 1) = 3 + n$

Luego $\sqrt{9+n^2} = 3 + n \;\rightarrow\; n = 0$

4. Coordenadas de un vector en una base no ortonormal

En una base ortonormal se consideran los vectores $\vec{u}(3, 0)$, $\vec{v}(2, 1)$ y $\vec{w}(-1, -2)$.

Comprobar que $B(\vec{u}, \vec{v})$ es también una base y calcular las coordenadas de $\vec{w}$ en esta base.

$\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{0}{1}$, luego no tienen la misma dirección. Por tanto, forman una base.

$\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v} \;\rightarrow\; (-1, -2) = m(3, 0) + n(2, 1) \;\rightarrow\; (-1, -2) = (3m + 2n, n)$

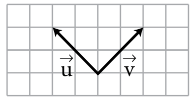
Igualando ambas coordenadas: $\begin{cases} -1 = 3m + 2n \\ -2 = n \end{cases}$

Solución: $m = 1,\; n = -2$

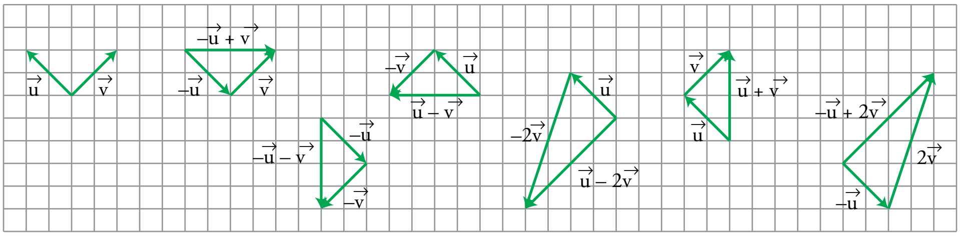
6 **A la vista de la figura, dibuja los vectores:**

$$-\vec{u} + \vec{v} \qquad \vec{u} - \vec{v} \qquad \vec{u} + \vec{v}$$

$$-\vec{u} - \vec{v} \qquad -\vec{u} + 2\vec{v} \qquad \vec{u} - 2\vec{v}$$



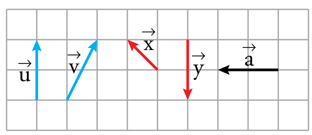
Si tomamos como base $B(\vec{u}, \vec{v})$, ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?



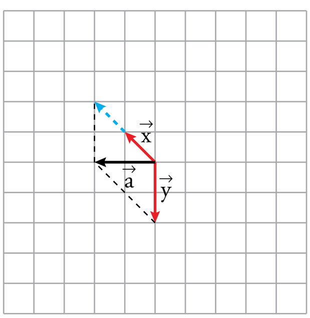
$-\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1)$ $\qquad$ $\vec{u} - \vec{v} = (1, -1)$ $\qquad$ $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$

$-\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1)$ $\qquad$ $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2)$ $\qquad$ $\vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2)$

7 **Escribe el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Escríbelo también como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

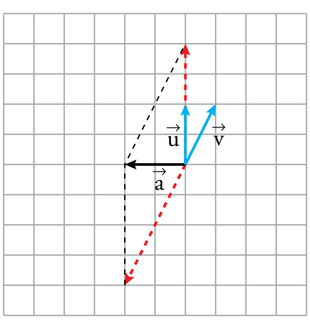


¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$? ¿Y respecto de la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$?



$\vec{a} = 2\vec{x} + \vec{y}$

En la base $B(\vec{x}, \vec{y})$, las coordenadas de $\vec{a}$ son $\vec{a} = (2, 1)$.



$\vec{a} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$

En la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$, las coordenadas de $\vec{a}$ son $\vec{a} = (2, -2)$.

14 **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.**

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por reducción (por ejemplo). Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumamos miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{rl} -1 = & 3m + 4n \\ -64 = & -16m - 4n \\ \hline -65 = & -13m \rightarrow m = \dfrac{-65}{-13} = 5 \end{array}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando n:

$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot (5) + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = -4$

Así, podemos decir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

15 **En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2, -5)$. Halla las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $B = ((1, -1), (0, -1))$.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}(1,-1) \\ \vec{y}(0,-1) \\ \vec{v}(2,-5) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} \rightarrow (2,-5) = a(1,-1) + b(0,-1) = (a,-a) + (0,-b) = (a,-a-b) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} 2 = a \\ -5 = -a - b \end{cases}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Las coordenadas de $\vec{v}$ en la nueva base son (2, 3).

Producto escalar. Módulo y ángulo

16 **Dados los vectores $\vec{x}(5, -2)$, $\vec{y}(0, 3)$, $\vec{z}(-1, 4)$, calcula:**

a) $\vec{x} \bullet \vec{y}$

b) $\vec{x} \bullet \vec{z}$

c) $\vec{y} \bullet \vec{z}$

a) $\vec{x} \bullet \vec{y} = (5, -2) \bullet (0, 3) = -6$

b) $\vec{x} \bullet \vec{z} = (5, -2) \bullet (-1, 4) = -5 - 8 = -13$

c) $\vec{y} \bullet \vec{z} = (0, 3) \bullet (-1, 4) = 12$

17 **De los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sabemos que:**

$$\vec{u}(-1, 1);\ |\vec{v}| = 1;\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°;\ \vec{w} \perp \vec{v}$$

Calcula $\vec{u} \bullet \vec{v}$ y $\vec{v} \bullet \vec{w}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot cos\,45° = \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$, porque $cos\,90° = 0$.

22 **Obtén, en cada caso, un vector paralelo y otro perpendicular al vector dado.**

a) $\vec{u}(0, 3)$ **b)** $\vec{u}(-5, 0)$ **c)** $\vec{u}(3, 8)$ **d)** $\vec{u}(-1, -1)$

	PARALELO	PERPENDICULAR
a)	(0, 9)	(3, 0)
b)	(10, 0)	(0, –5)
c)	(30, 80)	(–8, 3)
d)	(2, 2)	(1, –1)

23 **Calcula k para que el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:**

a) $\vec{u}(6, k)$, $\vec{v}(-1, 3)$

b) $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right)$, $\vec{v}(k, 3)$

c) $\vec{u}(-3, -2)$, $\vec{v}(5, k)$

d) $\vec{u}(k, -k)$, $\vec{v}(5, 5)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = \frac{1}{5}k - 6 = 0 \rightarrow k = 30$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = -2k - 15 = 0 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (k, -k) \cdot (5, 5) = 0 \rightarrow$ Cualquier $k \in \mathbb{R}$ es válido.

24 **Halla el módulo de cada uno de los siguientes vectores:**

$\vec{u}(3, 2)$ $\vec{v}(-2, 3)$ $\vec{w}(5, 0)$

$|\vec{u}| = |(3, 2)| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$|\vec{v}| = |(-2, 3)| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|\vec{w}| = |(5, 0)| = \sqrt{25+0} = 5$

25 **Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.**

$|\vec{u}| = \left|\left(\frac{3}{5}, m\right)\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + m^2} = 1 \rightarrow m = -\frac{4}{5},\ m = \frac{4}{5}$

27 **Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \rightarrow 25 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

28 **Dado el vector $\vec{u}(5, 12)$, determina:**

a) Los vectores unitarios paralelos a $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y perpendiculares a $\vec{u}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{25 + 144} = 13$

a) $\vec{v}_1 = \dfrac{1}{13}(5, 12) = \left(\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\dfrac{1}{13}(5, 12) = \left(-\dfrac{5}{13}, -\dfrac{12}{13}\right)$

b) $\vec{v}_1 = (-12, 5)$

$\vec{v}_2 = (12, -5)$

c) $\vec{v}_1 = \dfrac{1}{13}(-12, 5) = \left(-\dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\dfrac{1}{13}(-12, 5) = \left(\dfrac{12}{13}, -\dfrac{5}{13}\right)$

29 **Halla un vector de módulo 50 que sea perpendicular al vector $\vec{a}(8, 6)$.**

$\vec{u}\,' = (6, -8)$ es perpendicular a $\vec{a}$.

$|\vec{u}\,'| = \sqrt{36 + 64} = 10$

Un vector con esta dirección y de módulo 1 es:

$\vec{u} = \dfrac{1}{10}(6, -8) = \left(\dfrac{6}{10}, -\dfrac{8}{10}\right) = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$

El vector que buscamos es:

$\vec{v} = 50\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right) = (30, -40)$

También es solución $\vec{v}\,' = (-30, 40)$.

30 **Halla el ángulo que forman estos pares de vectores:**

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ **b)** $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$ **c)** $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{\sqrt{9+4}\,\sqrt{1+25}} = -\dfrac{7}{26}\sqrt{2} \approx -0{,}38 \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112°\ 20'\ 12''$

b) $cos\,(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{4 \cdot 3 - 6 \cdot 2}{\sqrt{16+36}\,\sqrt{9+4}} = 0 \to (\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$

c) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 3}{\sqrt{1+36}\,\sqrt{\frac{1}{4}+9}} = -1 \to (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$

31 **Dados** $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, k\right)$ **y** $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, **calcula** k **para que** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **formen un ángulo de 60°.**

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + k \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}\,\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = cos\,60° = \frac{1}{2} \to$$

$$\to \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = \frac{1}{2} \to \sqrt{\frac{1}{4}+k^2} = 1 \to k = -\frac{1}{2}\sqrt{3};\ k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

32 **Calcula** x, **de modo que el producto escalar de** $\vec{a}(3, -5)$ **y** $\vec{b}(x, 2)$ **sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores** $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$**?**

$\vec{a} \bullet \vec{b} = (3, -5) \bullet (x, 2) = 7 \to 3x - 10 = 7 \to x = \dfrac{17}{3}$

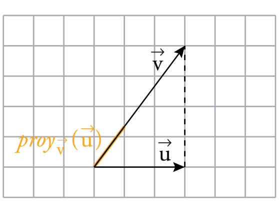
$$cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{7}{\sqrt{9+25}\,\sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2+4}} = \frac{21\sqrt{442}}{2\,210} \approx 0{,}2 \to (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 79°\ 31'\ 17''$$

33 **Calcula la proyección de** $\vec{u}$ **sobre** $\vec{v}$, **la de** $\vec{v}$ **sobre** $\vec{u}$ **y representa gráficamente cada situación.**

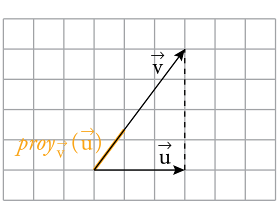
a) $\vec{u}(3, 0)$ **y** $\vec{v}(3, 4)$ **b)** $\vec{u}(1, 3)$ **y** $\vec{v}(-4, 2)$ **c)** $\vec{u}(-2, -5)$ **y** $\vec{v}(5, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{9+0} = 3$; $|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5$; $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{9}{3 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 5 \cdot \dfrac{3}{5} = 3$

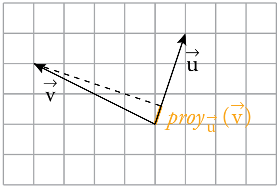


$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 3 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{5}$

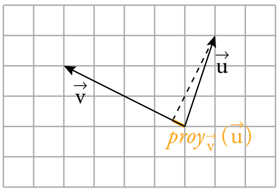


b) $|\vec{u}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $|\vec{v}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$; $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{-4 \cdot 6}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

$$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$



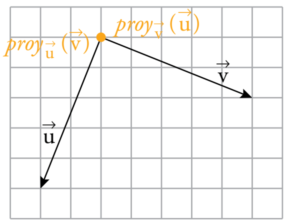
$$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{10} \cdot \frac{1}{10}\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$



c) $|\vec{u}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$; $|\vec{v}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

$$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$$

$$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$$



37 **Sean A, B y C los vértices de un triángulo. Si $\overrightarrow{AB}(-1, 4)$, $\overrightarrow{AC}(3, -1)$ y $\overrightarrow{BC}(4, -5)$, ¿puede tratarse de un triángulo rectángulo?**

$\overrightarrow{AB} = (-1, 4)$; $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (4, -5)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, 4) \cdot (3, -1) = -7$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1, 4) \cdot (4, -5) = -24$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (3, -1) \cdot (4, -5) = 17$

Ninguno de los tres productos escalares es cero, luego ningún par de vectores es perpendicular.

Los lados no son perpendiculares. Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

40 **Dados los vectores $\vec{u}(-1, a)$ y $\vec{v}(b, 15)$, halla a y b, en cada caso, de modo que:**

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ **y** $|\vec{u}| = \sqrt{10}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ **y** $|\vec{v}| = 17$

a) $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ |\vec{u}| = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 0 \\ \sqrt{1 + a^2} = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 0 \\ 1 + a^2 = 10 \end{cases}$

Soluciones: $a = -3,\ b = -45;\ \ a = 3,\ b = 45$

b) $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \\ |\vec{v}| = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 7 \\ \sqrt{b^2 + 15^2} = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 7 \\ b^2 + 15^2 = 17^2 \end{cases}$

Soluciones: $a = -\dfrac{1}{15},\ b = -8;\ \ a = 1,\ b = 8$

41 **Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} = -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{cases}$$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow k = \frac{-36 \pm \sqrt{1\,296 - 1152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$$

44 **Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}(3/2, 4)$ y $\vec{b}(5, 0)$.**

$$|\vec{a}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 16 = \frac{73}{4}$$

$$|\vec{b}|^2 = 25$$

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = k^2\vec{a} \cdot \vec{a} - k\vec{a} \cdot \vec{b} + k\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = k^2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = k^2\,\frac{73}{4} - 25$$

Este producto erscalar tiene que ser cero, luego:

$$k^2\,\frac{73}{4} - 25 = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{10}{73}\sqrt{73};\; k = -\frac{10}{73}\sqrt{73}$$

45 **Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.**

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$$

Como $|\vec{u}| = 3$, se tiene que:

$$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \;\rightarrow\; |\vec{v}|^2 = 20 \;\rightarrow\; |\vec{v}| = \sqrt{20}$$

46 **Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$, halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$\overset{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \;\rightarrow\; |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{34}$$

$$(*)\; \vec{u} \perp \vec{v} \;\rightarrow\; \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \;\rightarrow\; |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{34}$$

49 **Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45°.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 45° \to 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \to$$

$$\to 14 + 2x = \sqrt{100(1+x^2)} \to \frac{14+2x}{10} = \sqrt{1+x^2} \to$$

$$\to \frac{7+x}{5} = \sqrt{1+x^2} \to \frac{49+x^2+14x}{25} = 1 + x^2 \to$$

$$\to 49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \to 24x^2 - 14x - 24 = 0 \to$$

$$\to 12x^2 - 7x - 12 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49+576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$$

50 **Halla un vector unitario que forme un ángulo de 30° con el vector $\vec{a}(1, \sqrt{3})$.**

Llamamos $\vec{u} = (x, y)$ al vector buscado:

$$\begin{cases} (\widehat{\vec{u}, \vec{a}}) = 30° \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \cos 30° = \dfrac{x + y\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{1+3}} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x + y\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt{3} = x + y\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son: $x = 0, y = 1$; $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}, y = \frac{1}{2}$

Por tanto: $\vec{u}_1 = (0, 1)$; $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

51 **Determina x para que los vectores $\vec{u}(x, 1)$ y $\vec{v}(x, 0)$ formen un ángulo de 30°.**

$$\cos 30° = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} \cdot x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to 2x = \sqrt{3}\sqrt{x^2+1} \to 4x^2 = 3(x^2 + 1) \to x = \pm\sqrt{3}$$

52 **Halla un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 60° con el vector $\vec{b}(2, 2\sqrt{3})$ y tenga como módulo la mitad del módulo de $\vec{b}$.**

$\vec{a} = (x, y)$

$$\begin{cases} (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60° \\ |\vec{a}| = \dfrac{1}{2}|\vec{b}| \end{cases} \to \begin{cases} \cos 60° = \dfrac{2x + 2\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4+12}} \\ |\vec{a}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{4+12} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x + 2\sqrt{3}y}{4\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} 1 = \dfrac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to \begin{cases} 2 = x + \sqrt{3}y \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to x = -1, y = \sqrt{3};\; x = 2, y = 0$$

Soluciones: $\vec{a}_1 = (-1, \sqrt{3})$; $\vec{a}_2 = (2, 0)$

53 **De una base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ se sabe que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. En esa base las coordenadas de dos vectores son $\vec{x}(1, 2)$ e $\vec{y}(-1, 1)$. Calcula $\vec{x} \cdot \vec{y}$.**

* ***Mira el problema resuelto número 1.***

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) =$$

$$= -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= -|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2|\vec{v}|^2 = 4 - (-1) + 2 = 7$$

55 **Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?**

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \rightarrow 5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

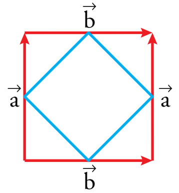
Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios $\rightarrow |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

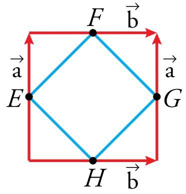
$$5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \, cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1}{2} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$$

58 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen un cuadrado. Demuestra que los puntos medios de sus lados definen otro cuadrado.**

* *Mira el problema resuelto número 5.*





$$\left.\begin{cases} \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \end{cases}\right\} \rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

$$\left.\begin{cases} \overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \end{cases}\right\} \rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$

$$\left.\begin{cases} |\overrightarrow{EH}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - 2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ |\overrightarrow{EF}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + 2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \end{cases}\right\} \rightarrow |\overrightarrow{EH}| = |\overrightarrow{EF}|$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} =$$

$$= -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = 0$$ porque el polígono original era cuadrado y, por tanto, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Como los otros dos lados son paralelos a estos, también son perpendiculares entre sí. Luego los lados del polígono $EFGH$ miden lo mismo, los opuestos son paralelos y son perpendiculares dos a dos. Por tanto, el polígono $EFGH$ es un cuadrado.