

Ecuaciones trigonométricas: ejercicios resueltos

1) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas

- a) $2\operatorname{tg}x - 3\operatorname{cotg}x - 1 = 0$
- b) $\cos^2x - 3\sin^2x = 0$
- c) $\sin(2x + 60) + \sin(x + 30) = 0$
- d) $\sin^2x - \cos^2x = 1/2$
- e) $\sin 2x \cdot \cos x = 6\sin^3x$
- f) $2\cos x = 3\operatorname{tg}x$

Indicaciones:

Debes intentar reducir toda la expresión a una única razón trigonométrica (que todo sean senos, o cosenos, por ejemplo). Cuando puedas llegar a una expresión del tipo $\operatorname{seno}(\text{algo}) = \text{un número}$, sólo tendrás que usar la función arco correspondiente (arcoseno, arcotangente, etc.).

Para conseguir que todas las razones trigonométricas sean iguales no hay una regla fija; tendrás que probar trasteando con las siguientes fórmulas básicas:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha &= \sec^2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \sin\alpha / \cos\alpha \\ 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha &= \operatorname{cosec}^2\alpha\end{aligned}$$

Ángulo suma

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) / (1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta) \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) / (1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)\end{aligned}$$

Ángulo doble

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= (2\operatorname{tg}\alpha) / (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\end{aligned}$$

Ángulo mitad

$$\begin{aligned}\sin\alpha/2 &= \pm \sqrt{(1 - \cos\alpha)/2} \\ \cos\alpha/2 &= \pm \sqrt{(1 + \cos\alpha)/2} \\ \operatorname{tg}\alpha/2 &= \pm \sqrt{(1 - \cos\alpha)/(1 + \cos\alpha)}\end{aligned}$$

Transformar sumas en productos

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin((\alpha+\beta)/2) \cdot \cos((\alpha-\beta)/2) \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos((\alpha+\beta)/2) \cdot \sin((\alpha-\beta)/2) \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos((\alpha+\beta)/2) \cdot \cos((\alpha-\beta)/2) \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin((\alpha+\beta)/2) \cdot \sin((\alpha-\beta)/2)\end{aligned}$$

Soluciones

a) $2\operatorname{tg}x - 3\operatorname{cotg}x - 1 = 0$

Solución:

Transformamos la cotg en tg. Llegamos a una ecuación de segundo grado.

$$2\operatorname{tg}x - 3/\operatorname{tg}x - 1 = 0$$

$$2\operatorname{tg}^2x - 3 - \operatorname{tg}x = 0$$

Resolvemos con la fórmula de la ecuación de segundo grado, siendo la incógnita tgx. Obtenemos dos soluciones:

Solución 1:

$$\operatorname{tg}x = 3/2 \rightarrow x = 56,31^\circ + 180k$$

Solución 2:

$$\operatorname{tg}x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 180k$$

b) $\cos^2x - 3\operatorname{sen}^2x = 0$

Solución:

$$1 - \operatorname{sen}^2x - 3\operatorname{sen}^2x = 0$$

$$1 - 4\operatorname{sen}^2x = 0$$

$$\operatorname{sen}^2x = 1/4$$

$$\operatorname{sen}x = \pm 1/2$$

$$x = \arcsen 1/2 \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + 360k \\ x_2 &= 150^\circ + 360k \end{aligned}$$

$$x = \arcsen(-1/2) \rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 210^\circ + 360k \\ x_4 &= 330^\circ + 360k \end{aligned}$$

c) $\operatorname{sen}(2x + 60) + \operatorname{sen}(x + 30) = 0$

Solución:

Convertimos la suma del seno de dos ángulos en un producto (revisa las fórmulas básicas):

$$2\operatorname{sen}(((2x+60)+(x+30))/2) \cdot \cos(((2x+60)-(x+30))/2) = 0$$

$$2\operatorname{sen}(3x/2 + 45) \cdot \cos(x/2 + 15) = 0$$

$$\operatorname{sen}(3x/2 + 45) \cdot \cos(x/2 + 15) = 0$$

$$\sin(3x/2 + 45) = 0 \rightarrow x_1 = -30^\circ + 120k$$

$$\cos(x/2 + 15) = 0 \rightarrow x_2 = 150^\circ + 360k$$

$$x_3 = 510^\circ + 360k$$

$$\text{d) } \sin^2 x - \cos^2 x = 1/2$$

Solución:

Cambiamos el signo a los dos lados de la ecuación, para que lo de la izquierda se convierta en el coseno del ángulo doble:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = 1/2$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = -1/2$$

$$\cos 2x = -1/2$$

$$2x_1 = 120^\circ + 360k \rightarrow x_1 = 60^\circ + 180k$$

$$2x_2 = 240 + 360k \rightarrow x_2 = 120 + 180k$$

$$\text{e) } \sin 2x \cdot \cos x = 6 \sin^3 x$$

Solución:

Transformamos el seno del ángulo doble, y pasamos el 2 dividiendo al lado derecho.

$$2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6 \sin^3 x$$

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x = 3 \sin^3 x$$

$$\sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin^3 x = 0$$

Sacamos factor común

$$\sin x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = 0$$

Como es un producto de dos cosas que dan cero, o bien la primera es cero o bien lo es la segunda. Así, por un lado,

$$\sin x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ + 180k$$

Por otro,

$$\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$$

$$1 - \sin^2 x - 3 \sin^2 x = 0$$

$$1 - 4 \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x = 1/4$$

$$\sin x = \pm 1/2$$

$$x = \arcsen 1/2 \rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 30^\circ + 360k \\ x_3 = 120^\circ + 360k \end{array}$$

$$x = \arcsen(-1/2) \rightarrow \begin{array}{l} x_4 = 210^\circ + 360k \\ x_5 = 330^\circ + 360k \end{array}$$

$$\mathbf{f) \ 2\cos x = 3\operatorname{tg} x}$$

$$2\cos x = 3\operatorname{sen} x / \cos x$$

$$2\cos^2 x = 3\operatorname{sen} x$$

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 3\operatorname{sen} x$$

$$2 - 2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x = 0$$

Resolvemos como una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es $\operatorname{sen} x$. Obtenemos dos soluciones:

Solución 1:

$$\operatorname{sen} x = 1/2 \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 30^\circ + 360k \\ x_2 = 150^\circ + 360k \end{array}$$

Solución 2:

$\operatorname{sen} x = -2 \rightarrow$ se descarta, porque ningún seno o coseno puede valer más de 1 o -1.