Modelo 2016. Problema 2B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

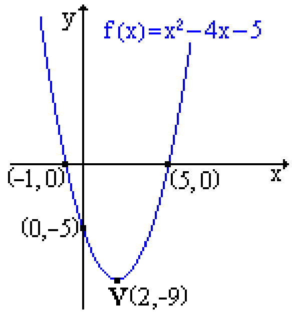
a) Represéntese gráficamente la función f.

Solución.

a. Parábola: Vértice $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$; $y_v = f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 - 5 = -9$. $V(2,-9)$

Cortes con los ejes: OX(y = 0): $x^2 - 4x - 5 = 0: \begin{cases} x = -1 & (-1,0) \\ x = 5 & (5,0) \end{cases}$

OY(x = 0): $(0, c) = (0, -5)$



Junio 2015. Problema 3A.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean las funciones reales de variable real

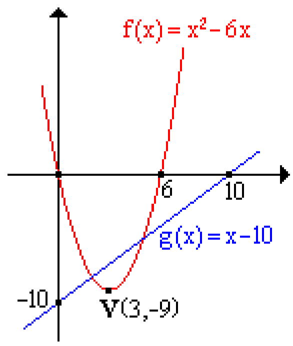
$$f(x) = x^2 - 6x \quad \text{y} \quad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.

Solución.

a. Para representar f (x) = x^2 − 6x (parábola), se calcula su vértice y los puntos de corte con los ejes.

- Vértice: $\left\{ \begin{array}{l} x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot 1} = 3 \\ y_v = f(3) = 3^3 - 6\cdot 3 = -9 \end{array} \right\} : V(3,-9)$
- Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX: (y=0). \; x^2 - 6x = 0: \; x\cdot(x-6) = 0: \begin{cases} x = 0 & (0,0) \\ x = 6 & (6,0) \end{cases} \\ OY: (x=0) \; (0,0) \end{cases}$



Para representar g(x) = x − 10 (lineal), se hace una tabla de valores

x	**y**
0	10
10	0

Modelo 2015. Problema 3B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

a) Determínense sus asíntotas.

Solución.

a. Asíntotas verticales, son rectas de la forma x = a tales que a ∉ Dominio y $\lim_{a\to a} f(x) = \frac{k}{0}$

$D[f(x)] = \{x \in R / x^2 - 2x - 3 \neq 0\}$ $\qquad x^2 - 2x - 3 = 0: \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ $\qquad D[f(x)] = R - \{-1, 3\}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{3}{0} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical de la función}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \frac{27}{0} \Rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical de la función}$$

Asíntota horizontal, es una recta de la forma y = L, donde $L = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \in R$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

Por tener asíntota horizontal hacia $\pm\infty$, la función no tiene asuntota oblicua

NOTA. *En el estudio de las asíntotas verticales no se han calculado los límites laterales ya que en el enunciado solo se pedía determinar las asíntotas, no se pedía estudiar la posición relativa de la función respecto de sus asíntotas ni representar la función.*

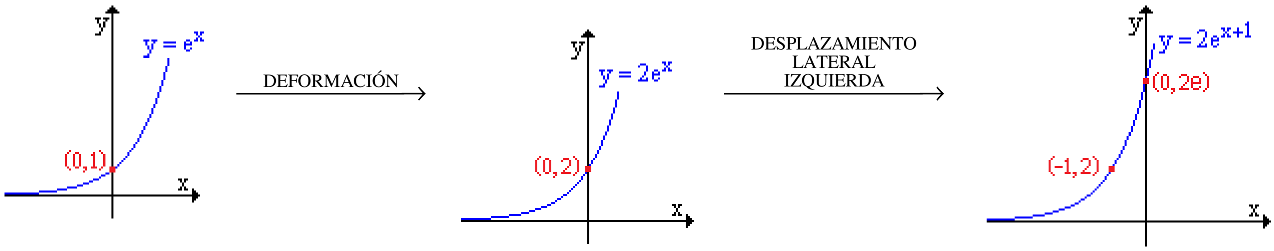
Septiembre 2014. Problema 3A.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2e^{x+1}$.

a) Esbócese la gráfica de la función f.

Solución.

a. Partiendo de la gráfica de la función elemental $y = e^x$ por desplazamientos y deformaciones se obtiene la gráfica de la función.



Septiembre 2014. Problema 2A.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x-2)}$$

a) Determínense las asíntotas de f.

Solución.

a. Asíntotas verticales, son recta de la forma x = a tal que $a \notin D(F(x))$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0}$

$D[f(x)] = \{x \in R / x(x-2) \neq 0\} = R - \{0, 2\}$

- x = 0: $\lim_{x\to 0} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \frac{9}{0} \Rightarrow x = 0$ Asíntota vertical. $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \frac{9}{0^-\cdot(-2)} = \frac{9}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \frac{9}{0^+\cdot(-2)} = \frac{9}{0^-} = -\infty \end{cases}$

- x = 2: $\lim_{x\to 2} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \frac{1}{0} \Rightarrow x = 2$ Asíntota vertical. $\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \frac{1}{2\cdot 0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \frac{1}{2\cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal. Recta de la forma y = L, donde $L = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \in R$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-6x+9}{x^2-2x} \underset{\div x^2}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1-\frac{6}{\pm\infty}+\frac{9}{(\pm\infty)^2}}{1-\frac{2}{\pm\infty}} = \frac{1-0+0}{1-0} = 1$$

Asíntota horizontal y = 1.

Asíntota oblicua. No tiene por tener horizontal.

Junio 2014. Problema 3B.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}$$

a) Determínense sus asíntotas

Solución.

a. **Asíntotas verticales**. Rectas de la forma x = a, tales que a $\notin$ Dominio y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{k}{0}$

$$D[f(x)]=\{x\in R / x-2\neq 0\}=R-\{2\}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{0}\Rightarrow \text{En } x = 2 \text{ hay una asíntota vertical.}$$

Tendencias laterales: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{2^2}{2^- -2}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{2^2}{2^+ -2}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{cases}$

Asíntota horizontal. Recta de la forma y = L, donde $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-2}\overset{(\div x^2)}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}=\frac{1}{0}=\pm\infty\notin R$$

La función no tiene asíntota horizontal

Asíntota oblicua. y = mx + n

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}\overset{(\div x^2)}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}}=\frac{1}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-2}\overset{(\div x)}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}}=\frac{2}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{2}{1-0}=2$$

Asíntota oblicua y = x +2

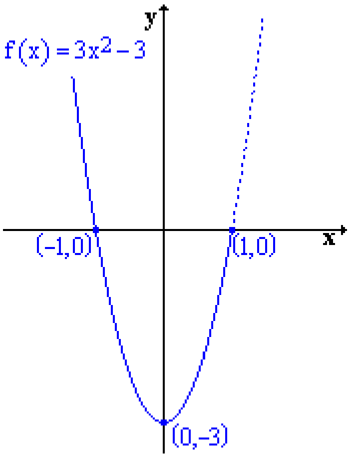
Septiembre 2013. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

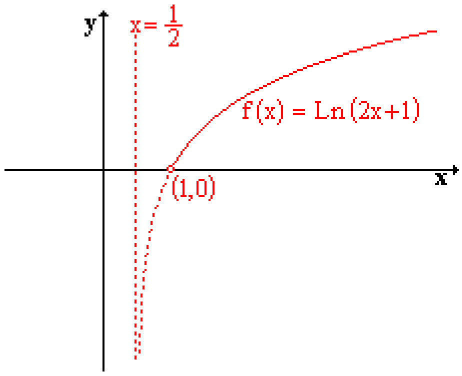
$$f(x)=\begin{cases}ax^2-3 & \text{si} \quad x\leq 1\\ \text{Ln}(2x-1) & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

b) Represéntese gráficamente la función para el caso a = 3.
Nota: Ln x denota al logaritmo neperiano del número x.

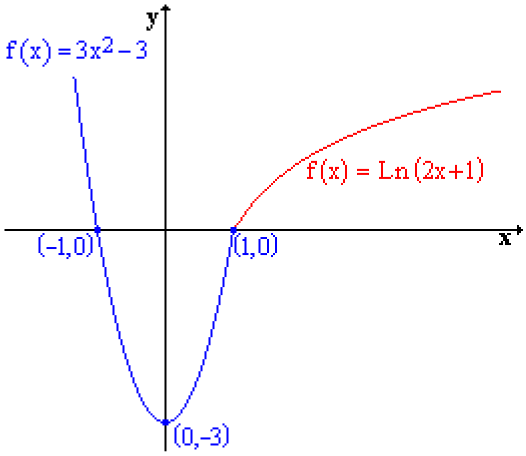
Solución.

b. Para representar la función $f(x)=\begin{cases}3x^2-3 & \text{si} \quad x\leq 1\\ \text{Ln}(2x-1) & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ se tiene en cuenta que esta definida por una expresión polinómica de grado dos $\left(f(x)=3x^2-3 \text{ si } x\leq 1\right)$ con vértice en (0, –3) y cortes con el eje OX en (–1, 0) y (1, 0), y por una función logarítmica $\left(f(x)=\text{Ln}(2x-1) \text{ si } x>1\right)$ de dominio $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, con asíntota vertical x = ½.





Tomando la parte continua de cada una de ellas se obtiene la grafica de la función.



Septiembre 2012. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{x(2x-1)}{x-1}$

(a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.
(b) Represéntese gráficamente la función f.

Solución.

Para la resolver el apartado a y b es conveniente operar el numerador

$$f(x)=\frac{2x^2-x}{x-1}$$

a. **Asíntotas verticales.** Puntos excluidos del dominio donde el límite sea infinito.

$$x = 2:\ \underset{x\to 1}{\text{Lím}}\frac{x(2x-1)}{x-1}=\frac{1}{0}\Rightarrow x=1 \text{ Asíntota vertical}:\begin{cases}\underset{x\to 1^-}{\text{Lím}}\dfrac{x(2x-1)}{x-1}=\dfrac{1\cdot(2\cdot 1-1)}{1^- -1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\[2ex] \underset{x\to 1^+}{\text{Lím}}\dfrac{x(2x-1)}{x-1}=\dfrac{1\cdot(2\cdot 1-1)}{1^+ -1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

Asíntota horizontal. $\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\ f(x)\ \underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\dfrac{2x^2-x}{x-1}\approx\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\dfrac{2x^2}{x}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}(2x)=\pm\infty$

La función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. y = mx + n

$$m=\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\frac{f(x)}{x}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\frac{\frac{2x^2-x}{x-1}}{x}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\frac{2x^2-x}{x^2-x}\approx\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$x=\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}(f(x)-mx)=\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\left(\frac{2x^2-x}{x-1}-2x\right)=\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\frac{x}{x-1}\approx\underset{x\to\pm\infty}{\text{Lím}}\frac{x}{x}=1$$

Asíntota oblicua y = 2x + 1.

Extremos relativos. Puntos de la función donde la primera derivada es cero y la segunda es distinta de cero. Criterio: si la segunda derivada es positiva, es un mínimo, si es negativa es un máximo.

$$f'(x)=\frac{(4x-1)\cdot(x-1)-\left(2x^2-x\right)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}=0 \quad 2x^2-4x+1=0:\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{(4x-4)(x-1)^2-\left(2x^2-4x+1\right)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(4x-4)(x-1)-2\left(2x^2-4x+1\right)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''\left(1+\sqrt{2}/2\right)=\frac{2}{\left(1+\sqrt{2}/2-1\right)^3}=4\sqrt{2}>0\Rightarrow \text{Mímimo relativo}\left(1+\sqrt{2}/2, f\left(1+\sqrt{2}/2\right)\right)$$

$$f''\left(1-\sqrt{2}/2\right)=\frac{2}{\left(1-\sqrt{2}/2-1\right)^3}=-4\sqrt{2}<0\Rightarrow \text{Máximo relativo}\left(1-\sqrt{2}/2, f\left(1-\sqrt{2}/2\right)\right)$$

$$f\left(1+\sqrt{2}/2\right)=\frac{\left(1+\sqrt{2}/2\right)\cdot\left(2\cdot\left(1+\sqrt{2}/2\right)-1\right)}{\left(1+\sqrt{2}/2\right)-1}=3+2\sqrt{2}$$

$$f\left(1-\sqrt{2}/2\right)=\frac{\left(1-\sqrt{2}/2\right)\cdot\left(2\cdot\left(1-\sqrt{2}/2\right)-1\right)}{\left(1-\sqrt{2}/2\right)-1}=3-2\sqrt{2}$$

Mínimo relativo $\left(1+\sqrt{2}/2, 3+2\sqrt{2}\right)$

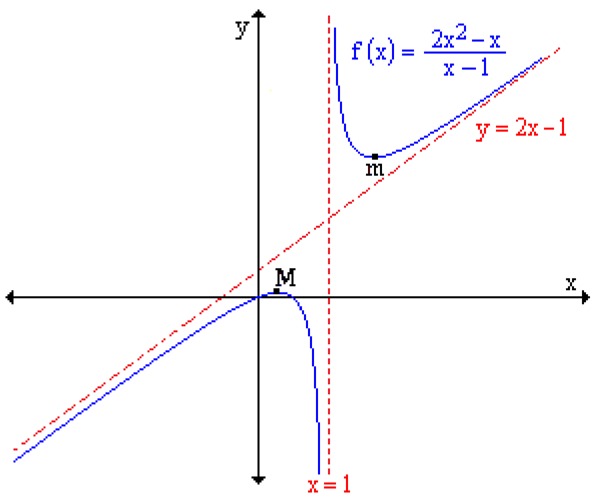
Máximo relativo $\left(1-\sqrt{2}/2, 3-2\sqrt{2}\right)$

b. Para esbozar la gráfica de la función, además de las asíntotas y los extremos relativos, es conveniente calcular los puntos de corte con los ejes.

OX (y = 0): $\dfrac{2x^2-x}{x-1}=0;\quad 2x^2-x=0$

$$x(2x-1)=0:\begin{cases} x=0;\ (0,0) \\ x=\dfrac{1}{2};\ \left(\dfrac{1}{2},0\right)\end{cases}$$

OY: No hace falta calcular el punto de corte porque uno de los puntos de corte con OY es el punto (0, 0).



Junio 2012. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+4x-3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

(b) Represéntese gráficamente la función f.

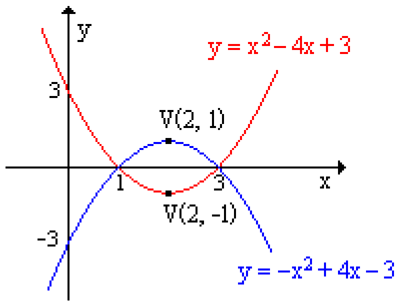
Solución.

b. La función se define por expresiones polinómicas de 2º grado que representan parábolas. Para representar una parábola basta con calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes.

- Vértice: $\begin{cases} x_V=-\dfrac{b}{2a} \\ y_V=f(x_V) \end{cases}$

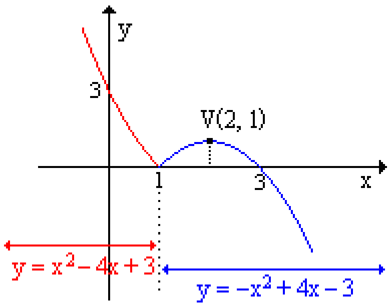
- Cortes con OX: y = 0, se resuelve la ecuación
- Corte con OY: x = 0, es el término independiente del polinomio (0, c).

Primero se representan ambas expresiones y a continuación se representa la función f(x).



$y=x^2-4x+3$ Vértice: $(2,-1)$ OX: $(1,0)$; $(3,0)$ OY: $(0,3)$
$y=-x^2+4x-3$ Vértice: $(2,1)$ OX: $(1,0)$; $(3,0)$ OY: $(0,-3)$

Teniendo en cuenta los intervalos donde están definidas cada una de las expresiones, la gráfica de la función es:



Septiembre 2011. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la fundón real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.
b) Represéntese gráficamente la función f.

Solución.

a. **Verticales:** En los puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/0$.

$$D[f(x)]=R$$

La función no tiene asíntotas verticales.

Horizontales: y = L:

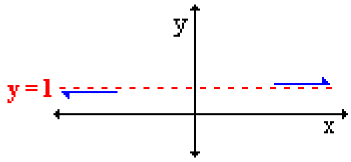
$$L=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\underset{\div x^2}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{\pm\infty}+\frac{1}{(\pm\infty)^2}}{1+\frac{1}{(\pm\infty)^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$$

Asíntota horizontal y = 1.

<u>Posición relativa</u>.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-L)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+1}-2\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+1-2\cdot\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{x^2+1}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2+1}=\frac{-1}{(-\infty)^2+1}=\frac{-1}{+\infty}=0^-$: La función se aproxima a la asíntota por debajo.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2+1}=\frac{-1}{(+\infty)^2+1}=\frac{-1}{+\infty}=0^-$: La función se aproxima a la asíntota por debajo.



- **Oblicuas:** Por tener asíntotas horizontales hacia ± ∞, no tiene oblicua.

Máximos y mínimos. Puntos de la función donde la primera derivada es cero y la segunda es distinta de cero, con el criterio de que si la segunda derivada es positiva, es un mínimo, si es negativa es un máximo.

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x+1)\cdot 1\cdot\left(x^2+1\right)-(x+1)^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+1-(x+1)\cdot x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot(x+1)\cdot(1-x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(x)=2\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2}=2\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)\left(\left(x^2+1\right)+\left(1-x^2\right)\cdot 2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=2\frac{-2x\cdot\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{4x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

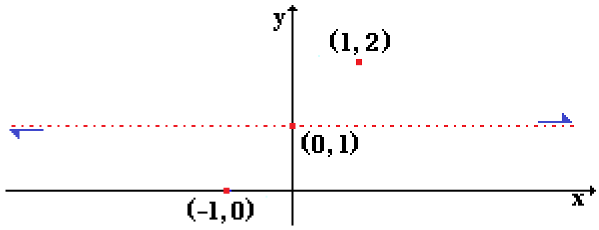
$$f'(x)=0\ :\ \frac{2\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=0\ :\ 1-x^2=0\ :\ x=\pm1:\begin{cases}\text{Si}\quad x=-1\quad y=\dfrac{(-1+1)^2}{(-1)^2+1}=0\quad(-1,0)\\ \text{Si}\quad x=1\quad y=\dfrac{(1+1)^2}{1^2+1}=2\quad(1,2)\end{cases}$$

- $\displaystyle f''(-1)=\frac{4\cdot(-1)\left((-1)^2-3\right)}{\left((-1)^2+1\right)^3}=1>0$ $\Rightarrow$ En (–1, 0) la función tiene un mínimo
- $\displaystyle f''(1)=\frac{4\cdot 1\left(1^2-3\right)}{\left(1^2+1\right)^3}=-1<0$ $\Rightarrow$ En (1, 2) la función tiene un máximo.

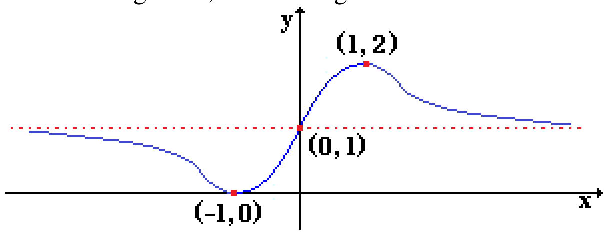
b. Para esbozar la gráfica de la función, además de la información obtenida en el apartado "a", es conveniente calcular los puntos de corte de la función con los ejes.

- Eje OX (y = 0): $\displaystyle\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=0\ :\ (x+1)^2=0\ :\ x+1=0\ :\ x=-1.$ (–1, 0)
- Eje OY (x = 0): $\displaystyle y=\frac{(0+1)^2}{0^2+1}=1\ :\ (0,1)$

Marcando sobre unos ejes la información obtenida:



Con la información sobre la gráfica, se traza la gráfica de la función.



Junio 2011. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

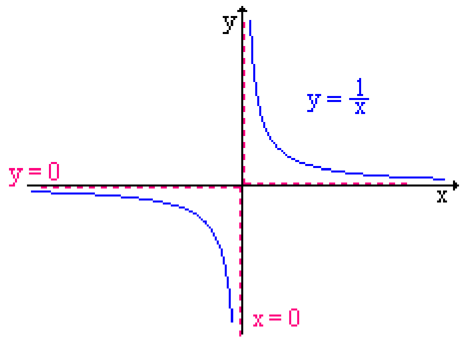
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x\le -1\\[2mm] \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$$

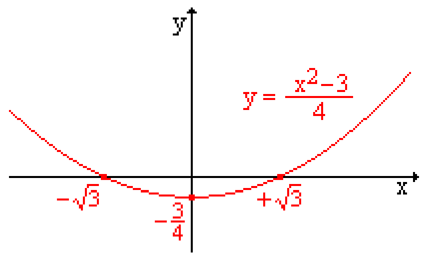
b) Para a = 1, b = 3, represéntese gráficamente la función f.

Solución.

b. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\le -1\\[2mm] \dfrac{x^2-3}{4} & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$$



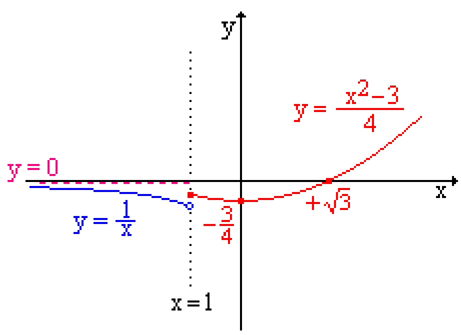
- $y=\dfrac{1}{x}$ Hipérbola equilátera, con asíntota horizontal y = 0; asíntota vertical y = 0.



- $y=\dfrac{x^2-3}{4}$ Parábola de eje vertical desplazada verticalmente hacia abajo y deformada. Vértice $\left(-\dfrac{3}{4},0\right)$, cortes con OX: $\left(-\sqrt{3},0\right)$; $\left(+\sqrt{3},0\right)$

Por último, para dibujar la gráfica de la función es conveniente calcular los valores que toman ambas expresiones en el punto frontera.

$$f\left(-1^-\right)=\frac{1}{1}=1;\ f\left(-1^+\right)=\frac{(-1)^2-3}{4}=-\frac{1}{2}$$



Modelo 2011. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una empresa produce cable de fibra óptica que vende a un precio de x euros el metro. Se estima que la venta diaria de cable (en miles de metros) se expresa en términos del precio mediante la función:

$$f(x)=\frac{6}{x^2+1}$$

b) Calcular el precio x que ha de fijarse para que el ingreso diario sea máximo y calcular dicho ingreso máximo.
c) Determinar las asíntotas de I(x) y esbozar su gráfica.

Solución.
b. Se pide calcular el punto de máximo de la función de ingresos. El máximo se localiza en los puntos donde la primera derivada se anula y la segunda es negativa.

$$I'(x)=\frac{6000\cdot\left(x^2+1\right)-6000x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=6000\cdot\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$I'(x)=0 \qquad 6000\cdot\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \qquad 1-x^2=0 \qquad x=\pm 1$$

$$I''(x)=6000\cdot\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=6000\cdot\frac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)-\left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$I''(x)=6000\cdot\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}:\begin{cases} I''(-1)=6000\cdot\dfrac{2\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^3}>0\Rightarrow \text{Mínimo}\\ I''(1)=6000\cdot\dfrac{2\cdot 1^3-6\cdot 1}{\left(1^2+1\right)^3}<0\Rightarrow \text{Maximo}\end{cases}$$

$$I(1)=\frac{6000\cdot 1}{1^2+1}=3000€$$

Se obtienen unos ingresos máximos de 3000 € con un precio de 1 €/m

c. **Asíntotas verticales:** Rectas de la forma x = a tal que a $\notin$ Dominio De I(x).

$$D[I(x)]=\left\{x\in R/x^2+1\neq 0\right\} \qquad x^2+1\neq 0\ \ \forall x\in R \qquad D[I(x)]=R$$

La función I(x) no tiene asíntotas verticales.

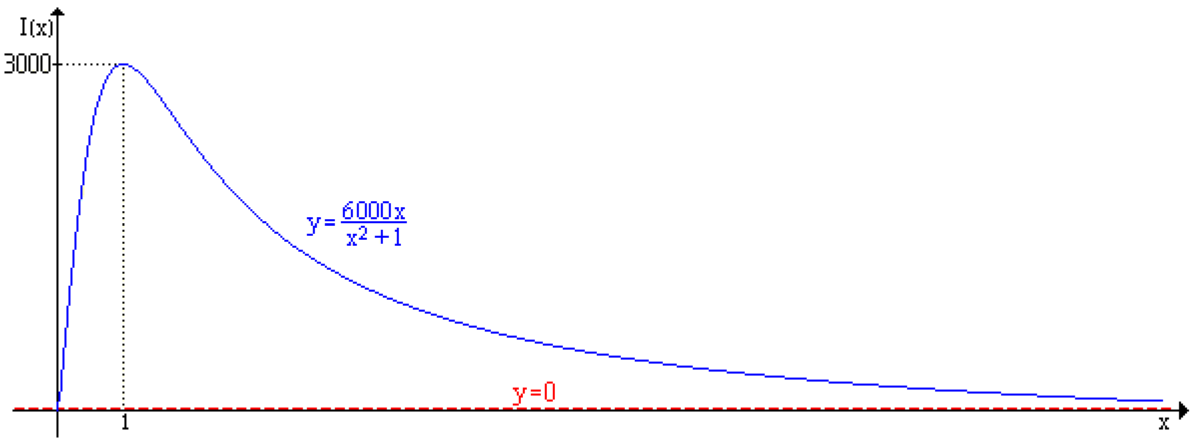
Asíntotas horizontales: Rectas de la forma y = L tal que $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty} I(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} I(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6000x}{x^2+1}\underset{\div x^2}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{6000}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{6000}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1}=0$$

La función tiene una asíntota horizontal en y = 0.

Asíntotas oblicuas. La función no presenta asíntota oblicua por tener asíntota horizontal

Para representar la función, se tiene en cuenta que la función representa los ingresos y la variable el precio de venta de un producto, por lo tanto la existencia de la función solo tiene sentido para valores de x mayores o iguales que cero.



Septiembre 2010. F.M. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

b) Determínese los extremos relativos de *f* y esbócese su gráfica.

Solución.

b. Una función tiene extremos relativos en los puntos donde su primera derivada sea cero y su segunda derivada sea distinta de cero, con el siguiente criterio:

$$\text{Sí } f'(a) = 0 \text{ y } f''(a) \neq 0 \text{ en (a, f(a)) la función tiene un extremo relativo: } \begin{cases} f''(a) < 0 : \text{Máximo} \\ f''(a) > 0 : \text{Mínimo} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 : \ 3x^2 - 6x = 0 : \ 3x \cdot (x-2) = 0 : \ \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 : x = 2 \end{cases}$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \text{ En (0, f(0)) la función tiene un máximo local}$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0 \text{ En (2, f(2)) la función tiene un mínimo local}$$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \ \Rightarrow \text{(0, 4) Máximo}$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0 \ \Rightarrow \text{(2, 0) Mínimo.}$$

Gráfica. Cortes con los ejes:

- OX (y = 0): $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ Mediante Ruffini se calculan las soluciones $(-1, 0)$; $(2, 0)$
- OY (x = 0): $y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$; $(0, 4)$

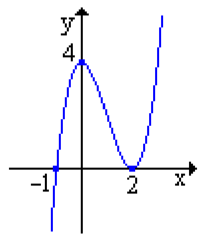
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} & \\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Tendencia en los infinitos:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 4\right) = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 4\right) = (\infty)^3 = \infty$$

Conocidos los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos y las tendencia en los infinitos, se esboza la gráfica de la función.



Septiembre 2010. F.G. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & \text{si} & x \leq -1 \\ -3x^2 + b & \text{si} & -1 < x < 1 \\ \log x + a & \text{si} & x \geq 1 \end{cases}$$

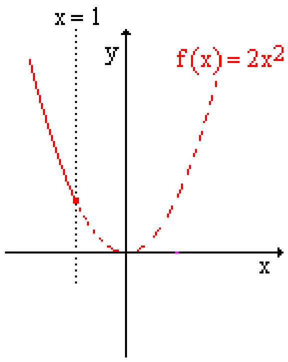
b) Para a = 0, b = 3, represéntese gráficamente la función f.

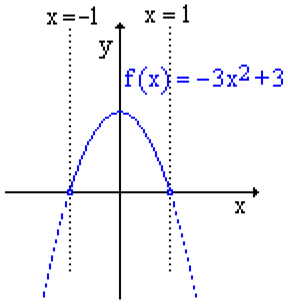
Nota.– La notación log representa al logaritmo neperiano

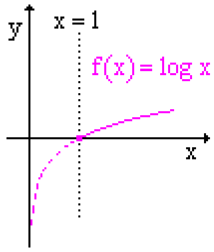
Solución.

b. Para a = 0, b = 3: $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{si} \quad x\le -1 \\ -3x^2+3 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ \log x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$

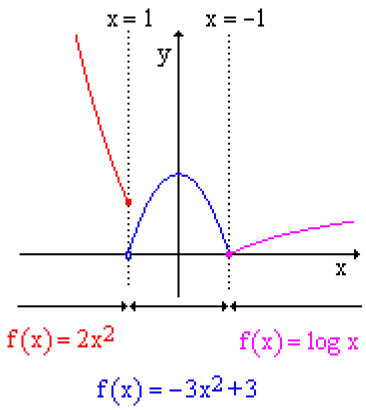
La función está definida por funciones sencillas cuyas gráficas se representan a continuación.







La función f(x) esta formado por los trazos continuos de cada una de ellas, si los representamos sobre un mismo eje de coordenadas, se obtiene la gráfica de la función.



Junio 2010. F.M. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

a) Determínense sus asíntotas.
b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales. Esbócese la gráfica de f.

Solución.

a. **Verticales:** Puntos excluidos del dominio donde el límite quede de la forma $k/_0$.

$$D[f(x)]=\{x\in R\ /\ x-1\ne 0\}=R-\{1\}$$

$$\textbf{x = 1}:\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1^2}{0}=\frac{1}{0}\ \text{Asíntota vertical.}$$

Para poder esbozar la gráfica de la función es necesario estudiar la posición de la función respecto de sus asíntotas.

Posición relativa. Se estudian los límites laterales en x = 1.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1^2}{1^- -1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1^2}{1^+ -1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Horizontal: y = L:

$$L=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-1}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\pm\infty}{1-\frac{1}{\pm\infty}}=\frac{\pm\infty}{1-0}=\pm\infty$$

La función no tiene asíntotas horizontales

Oblicua: $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-x}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x^2}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\pm\infty}}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x\cdot(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}}$$

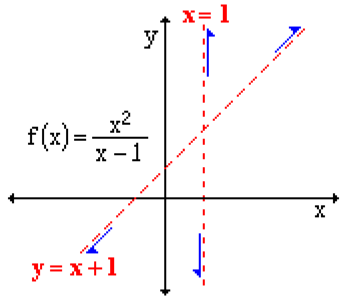
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\pm\infty}}=\frac{1}{1-0}=1$$

Asíntota oblicua: **y = x + 1**

Posición relativa.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+n))=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-(x+1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}$$

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-\infty-1}=0^-$ La función se aproxima a la asíntota por debajo.
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{+\infty-1}=0^+$ La función se aproxima a la asíntota por encima.



Otra forma:

$$\begin{array}{rl|l} x^2 & & x-1 \\ \hline -x^2+x & & x+1 \\ \hline \not{\ } \quad x & & \\ -x+1 & & y=x+1 \\ \hline \not{\ } \quad 1 & & \end{array}$$

Para estudiar la posición relativa sin tener que hacer límites, se puede dar valores a la función y a la oblicua.

x	$y=f(x)=\frac{x^2}{x-1}$	$y_{Ob}=x+1$	Comparación
-1000	$\frac{(-1000)^2}{-1000-1}=999{,}0009...$	$-1000+1=999$	$y_f<y_{Ob}$
1000	$\frac{1000^2}{1000-1}=1000{,}001...$	$1000+1=1001$	$y_f>y_{Ob}$

Cuando $x\to-\infty$, la función se acerca a la asíntota por debajo, cuando $x\to+\infty$, la función se acerca a la asíntota por encima.

b. Una función tiene extremos relativos en los puntos donde su primera derivada sea cero y su segunda derivada sea distinta de cero, con el siguiente criterio:

Sí $f'(a)=0$ y $f''(a)\neq 0$ en (a, f(a)) la función tiene un extremo relativo: $\begin{cases} f''(a)<0: \text{Máximo} \\ f''(a)>0: \text{Mínimo}\end{cases}$

$$f'(x)=\frac{x^2}{x-1}=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\ :\ \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\ :\ x^2-2x=0\ :\ x\cdot(x-2)=0:\begin{cases}x=0\\ x-2=0:x=2\end{cases}$$

$$f(0)=\frac{0^2}{0-1}=0:(0,0)\ ;\quad f(2)=\frac{2^2}{2-1}=4:(2,4)$$

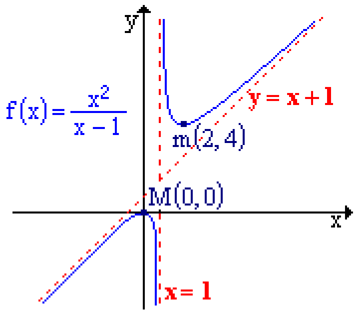
$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-2\cdot\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=-2<0\ \Rightarrow (0,\,0)\text{ la función tiene un máximo.}$$

$$f''(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=2>0\ \Rightarrow (2,\,4)\text{ la función tiene un mínimo.}$$

Con los datos obtenidos en los apartados anteriores se puede esbozar la gráfica de la función.



- Dominio: R – { 1 }
- Asíntota vertical: x = 1.
- Asíntota oblicua: y = x + 1
- Punto de corte con los ejes: (0, 0)
- Mínimo local: (0, 0)
- Máximo local: (2, 4)

Junio 2010. F.M. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-x+a & \text{si}\quad x\le 1\\ \dfrac{3}{bx} & \text{si}\quad x>1\end{cases}$$

b) Para a = 6 y b = 3/4, determínense los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX. Esbócese la gráfica de f.

Solución.

b. a = 6; b = 3/4: $f(x)=\begin{cases}-x^2-x+6 & \text{si}\quad x\le 1\\ \dfrac{4}{x} & \text{si}\quad x>1\end{cases}$

- Cortes con OX (y = 0): $\begin{cases}-x^2-x+6=0:\begin{cases}x=-3\in(-\infty,1]\\ x=2\notin(-\infty,1]\ \text{No se admite}\end{cases}\\ \dfrac{4}{x}\ne 0\ \ \forall\, x\in\text{Dominio}\end{cases}$

La función corta al eje OX en el punto (–3, 0).

- Corte con OY (x = 0). $y=f(0)=-0^2-0+6=6$. La función corta a OY en el punto (0, 6).

Gráfica. La gráfica consta de dos intervalos, el primero (–∞, 1] parábola abierta hacia –∞ con vértice (máximo) en:

$$x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\cdot(-1)}=-\frac{1}{2}\ ;\ y_V=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+6=\frac{25}{4}$$

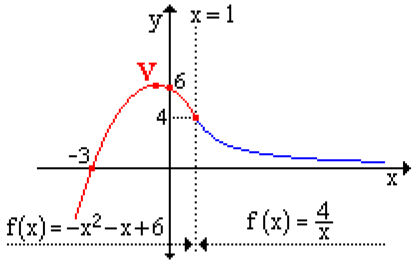
$$V = \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

El segundo intervalo, (1, +∞), es una hipérbola equilátera.

Por último, se debe calcular el valor que toma la función cuando tiende a 1 por la izquierda y por la derecha.

$$f(1^-) = -1^2 - 1 + 6 = 4\ ;\ f(1^+) = \frac{4}{1} = 4$$

Por lo tanto la función en el punto x = 1 habrá que dibujarla de forma continua.



Septiembre 2009. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

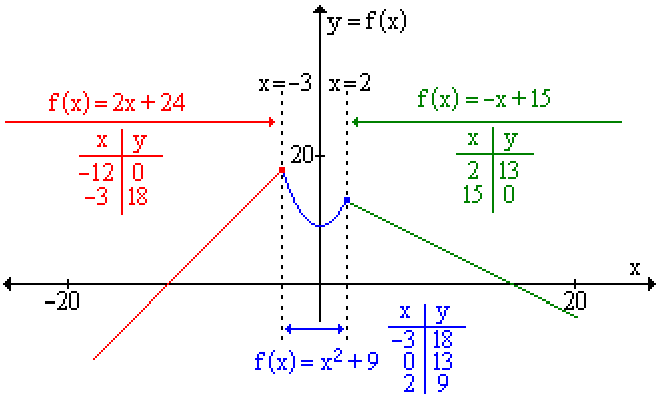
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 24 & \text{si} \quad x \le -3 \\ x^2 + 9 & \text{si} \quad -3 < x \le 2 \\ -x + 15 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente la función f.

Solución.

a. Función definida por intervalos mediante expresiones polinómicas de 1º y 2º grado. Para representar la función basta con hacer una tabla de valores dando a la variable los valores correspondientes al intervalo donde está definida cada expresión.



Septiembre 2009. Ejercicio 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

en la x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.

a) Represéntese gráficamente' la función B(x) con x ≥ 0.

Solución.

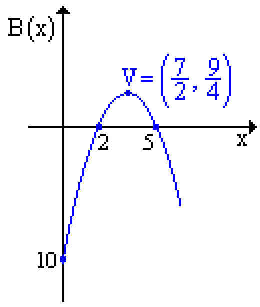
a. Función polinómica de 2º grado. Para representarla se calcula el vértice y los puntos de corte de la función con los ejes coordenados. Hay que tener en cuenta que solo se dibuja para valores de x ≥ 0, es decir, a la derecha del eje OY.

- Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2\cdot(-1)} = \frac{7}{2}\ ;\ y_v = f(x_v) = f\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7\cdot\left(\frac{7}{2}\right) - 10 = \frac{9}{4}$

$$V = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

- Cortes con OX (y = 0): $-x^2+7x-10=0:\begin{cases}x=2:(2,0)\\ x=5:(5,0)\end{cases}$

- Corte con OY (x = 0): $y=-0^2+7\cdot 0-10=-10:(0,10)$



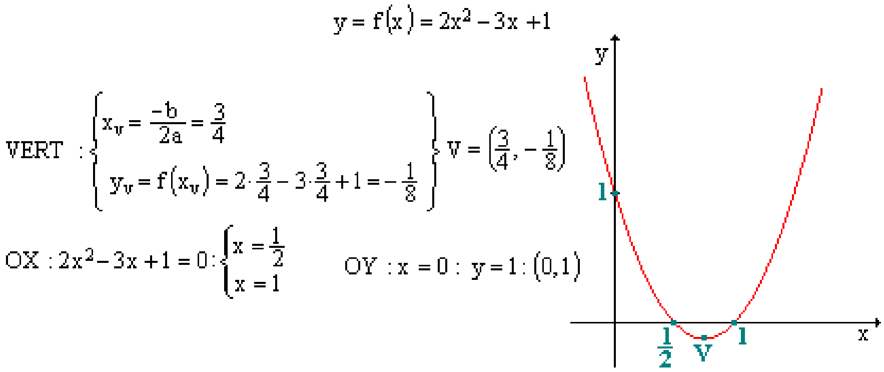
Modelo 2005. 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos)

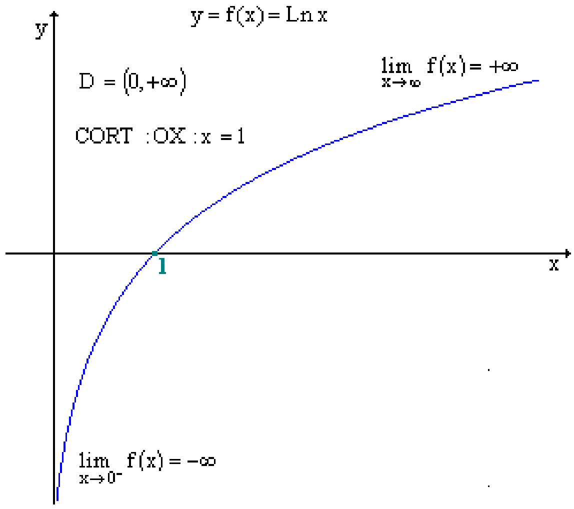
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-3x+1 & \text{si} \quad x\le 1\\ \ln(x) & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

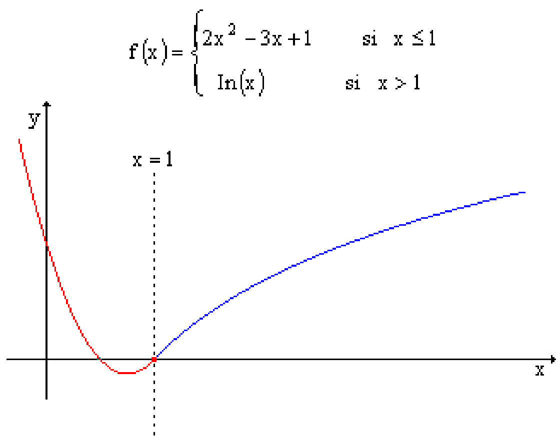
b) Esbozar su gráfica.

Solución.





Tomando de cada una de las funciones el intervalo correspondiente, se construye la gráfica de la función pedida.



Septiembre 2004. Ejercicio 2A. (Puntuación máxima 3 puntos)
Se considera la función real definida por

$$f(x)=\frac{x^3}{a}-ax^2+5x+10\ ,\ \ a\neq 0$$

b) Calcular los extremos relativos de f (x) para a = 3 y representar la función.

Solución.

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+10$$

Extremos relativos. Una función presenta extremos relativos en los puntos donde su primera derivada es nula y su segunda derivada no nula, con el siguiente criterio:

- Si la segunda derivada es negativa, MÁXIMO
- Si la segunda derivada es positiva, MÍNIMO

$$f'(x)=x^2-6x+5\quad :\quad f''(x)=2x-6$$

$$f'(x)=0\ :\ x^2-6x+5=0:\begin{cases} x=1 & f''(1)=2\cdot 1-6=-4<0\\ x=5 & f''(5)=2\cdot 5-6=4>0\end{cases}$$

$$f(1)=\frac{1^3}{3}-3\cdot 1^2+5\cdot 1+10=\frac{37}{3}\quad :\quad \text{En }\left(1,\frac{37}{3}\right)\ f(x)\ \text{ tiene un máximo}$$

$$f(5)=\frac{5^3}{3}-3\cdot 5^2+5\cdot 5+10=\frac{5}{3}\quad :\quad \text{En }\left(5,\frac{5}{3}\right)\ f(x)\ \text{ tiene un mínimo}$$

Gráfica. Por ser polinómica el dominio es todo R, no tiene asíntotas, las tendencias en el infinito son:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+10\right)=+\infty\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+5x+10\right)=-\infty$$

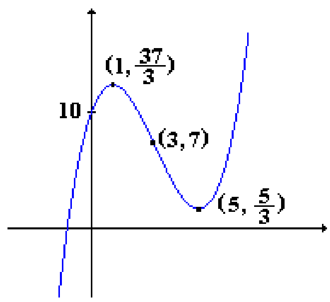
Por ser continua y tener un máximo en x = 1 y un mínimo en x = 5, la monotonía de la función es:

$$\text{En }(-\infty,1)\cup(5,+\infty)\ f'(x)>0\Rightarrow f(x)\ \text{ es creciente}$$
$$\text{En }(1,5)\ f'(x)<0\Rightarrow f(x)\ \text{ es decreciente}$$

Los puntos de inflexión y la curvatura se obtiene del estudio de los ceros y signo de la segunda deriva.

$$f''(x)=2x-6:2x-6=0:x=3$$

$$x=3:\begin{cases}\text{Sí }\ x<3\ :\ f''(x)<0,\ \ f(x)\ \text{ es concava}(\cap)\\ \text{Si }\ x=3\ :\ f''(3)=0:f(3)=7\ :\ (3,7)\ \text{Punto de inflexión}\\ \text{Sí }\ x>3\ :\ f''(x)>0,\ \ f(x)\ \text{ es convexa}(\cup)\end{cases}$$



Todos los datos anteriores permiten trazar la gráfica de la función razonadamente.

Modelo 2004. 2A. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

a) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.
b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.
c) Esbozar la gráfica f(x).

Solución.

a. La condición necesaria y suficiente para que una función y =f (x) alcance en x = x_0 un extremo relativo (máximo o mínimo) es que la primera derivada sea distinta de cero, con el siguiente criterio.

$$\text{Si } f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } f''(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ existe un máximo relativo} \\ \text{Si } f''(x_0) > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ existe un mínimo relativo} \end{cases}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

$$f'(x) = 1 + (-1) \cdot x^{-2} = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 - (-2) \cdot x^{-3} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Igualando a cero la primera derivada, se localizan los posibles extremos relativos, la segunda derivada, confirma y diferencia los extremos relativos.

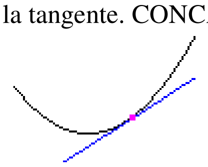
$$f'(x) = 0: \quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0: \quad 1 = \frac{1}{x^2}: \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1: \begin{cases} f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2 \Rightarrow (1, 2) \\ f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2 \Rightarrow (-1, -2) \end{cases}$$

$$f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow (1,2) \text{ Mínimo}$$

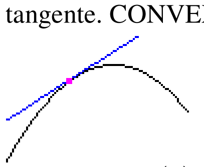
$$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow (-1,-2) \text{ Máximo}$$

b. La curvatura de una función se estudia con el signo de la 2ª derivada según el siguiente criterio.

Si $f''(x) > 0$, la curva estará por encima de la tangente. CONCAVA



Si $f''(x) < 0$, la curva esta por debajo de su tangente. CONVEXA



$$f''(x) = \frac{2}{x^3}: \begin{cases} \text{Si } x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \text{convexa} \\ \text{Si } x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{concava} \end{cases}$$

c. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Dominio: $D = \Re - \{0\}$

Corte con los ejes:

OX: y = 0: $\dfrac{x^2 + 1}{x} = 0 : x^2 + 1 = 0 : x = \sqrt{-1} \notin \Re$ La función no corta al eje OX

OY: x = 0. La función no está definida en cero. La función no corta al eje OY.

Asíntotas:

-Vertical: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0}=\infty:\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty\end{cases}$

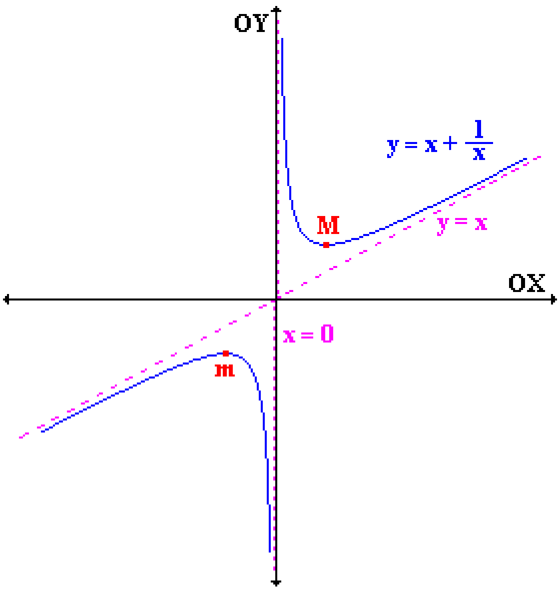
- Horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0}=\infty$ No existen asíntotas horizontales.

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1}=\frac{1+0}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$y = x$$



Junio 2002. 2B. (Puntuación máxima: 3 puntos).
Se considera la curva de ecuación:

$$y = x^3 - 4x$$

a) Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus máximos y mínimos relativos, si existen
b) Representar gráficamente la curva
c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la curva y el eje OX

Solución.

a. Puntos de corte:

$$\begin{cases}OX: y=0: x^3-4x=0: x\cdot\left(x^2-4\right)=0:\begin{cases}x=0\\ x^2-4=0: x=\pm 2\end{cases}\Rightarrow (0,0), (-2,0), (2,0)\\ OY: x=0: y=0^3-4\cdot 0=0\Rightarrow (0,0)\end{cases}$$

Máximos y mínimos. La función alcanza extremos relativos(máximos ó mínimos locales) en aquellos puntos donde se anule su primera derivada y sea distinta de cero su segunda derivada.

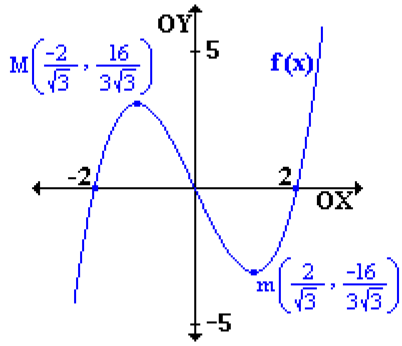
$$f(x) = x^3 - 4x \qquad f'(x) = 3x^2 - 4 \qquad f''(x) = 6x$$

$$f´(x) = 3x^2 - 4 = 0: \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} : \begin{cases} y = f\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\cdot\dfrac{-2}{\sqrt{3}} = \dfrac{16}{3\sqrt{3}} \\ f´´\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right) = 6\cdot\dfrac{-2}{\sqrt{3}} < 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{16}{3\sqrt{3}}\right) \text{ Máximo} \\ x = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} : \begin{cases} y = f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{16}{3\sqrt{3}} \\ f´´\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 6\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}} < 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{16}{3\sqrt{3}}\right) \text{ Mínimo} \end{cases}$$

b. Gráfica de la función. Se pide esbozar la gráfica de una función cúbica conocidos los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos. Teniendo en cuenta además que, las funciones polinómicas no tienen asíntotas y que sus tendencias en este caso son:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - 4x\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - 4x\right) = -\infty$$

la gráfica tiene la forma:



Junio 2001. Ejercicio 2B. (Puntuaci6n máxima: 3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

(a) Determínense sus máximos y mínimos relativos.
(b) Calcúlense sus puntos de inflexión.
(c) Esbócese su gráfica.

Solución.

a. La condición necesaria y suficiente para que una función alcance un extremo relativo en un punto es que en dicho punto la primera derivada de la función sea cero, y la segunda sea distinta de cero, con el siguiente criterio:

$$\text{Sí } f'(x_o) = 0 \text{ y: } \begin{cases} f''(x_o) > 0 \Rightarrow (x_o, f(x_o)) \text{MÍNIMO} \\ f''(x_o) < 0 \Rightarrow (x_o, f(x_o)) \text{MÁXIMO} \end{cases}$$

Los posibles puntos de extremo relativo se obtiene con los ceros de la 1ª derivada:

$$f'(x) = x^2 + x - 2; \qquad f'(x) = 0; \qquad x^2 + x - 2 = 0;$$

resolviendo la ecuación de segundo grado

$$x = 1 \text{ ó } x = -2$$

cuya imágenes son:

$$f(1) = -\frac{1}{6} \qquad f(-2) = \frac{13}{3}$$

Los posibles extremos relativos de la función f(x) son los puntos $\left(-2, \dfrac{13}{3}\right)$ y $\left(1, -\dfrac{1}{6}\right)$

Para comprobar si son extremos relativos se tendrá en cuenta el criterio de la 2ª derivada:

$$f''(x) = 2x + 1$$

sustituyendo los valores que anulan la 1ª derivada:

$$f''(-2) = 2\cdot(-2) + 1 = -3 < 0 \quad \text{En } \left(-2, \frac{13}{3}\right) \text{MÁXIMO}$$

$$f''(1) = 2\cdot 1 + 1 = 3 > 0 \quad \text{En } \left(1, -\frac{1}{6}\right) \text{MÍNIMO}$$

b. Punto de inflexión: La condición necesaria y suficiente para que una función tenga un punto de inflexión es que en dicho punto la segunda derivada de la función sea cero, y la tercera sea distinta de cero, con el siguiente criterio:

$$\text{Sí } f''(x_o) = 0 \text{ y: } \begin{cases} f'''(x_o) > 0 \Rightarrow (x_o, f(x_o)) \text{Inflesión}[\text{Convexa}(\cap) - \text{Concava}(\cap)] \\ f'''(x_o) < 0 \Rightarrow (x_o, f(x_o)) \text{Inflesión}[\text{Concava}(\cap) - \text{Convexa}(\cap)] \end{cases}$$

Los posibles puntos de inflexión se obtienen de los ceros de la 2ª derivada

$$f''(x) = 2x + 1\,; \quad f''(x) = 0\,; \quad 2x+1=0; \quad x = -\frac{1}{2}$$

cuya imagen en la función es:

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{25}{12} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{25}{12}\right)$$

Para comprobar si en $\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{25}{12}\right)$ $\exists$ un P.I. se tiene en cuenta el criterio de la 3ª derivada.

$$f'''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{25}{12}\right) \exists.\ \text{P.I. Convexa}(\cap) - \text{Concava}(\cap)$$

c. Gráfica