NOMBRE Y APELLIDOS:____

1º) Dados el plano $\pi: 2x - y = 2 \;\; y\; la\; recta\;\; r: \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ se pide:

a) Determinar la posición relativa de ambos.
b) Obtener la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π.
c) Determinar la ecuación de una recta que pase por el punto A=(-2,1,0) , corte a la recta r y sea paralela al plano π.

2º) Dados $el\; plano\; \pi: 2x - y + 2z + 3 = 0 \;\; y\; la\; recta\; r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ determina:

a) La posición relativa.
b) La distancia entre ambos.
c) El punto simétrico de P = (3,2,1) respecto al plano π.

3º) Dadas las rectas $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \;\; y\;\; s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ se pide:

a) Determina la posición relativa.
b) Halla la perpendicular común a ambas.

4º) Dados el punto $P = (1,0,-1),\;\; el\; plano\; \pi: 2x - y + z + 1 = 0 \;\; y\; la\; recta\;\; r: \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$ se pide:

a) Hallar el ángulo que forman la recta y el plano.
b) Calcular la distancia del punto P a la recta r.
c) Calcular la distancia del punto P al plano π.

5º) Dados el plano $\pi: x + y - z = a \quad y\; la\; recta\;\; r: \begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ determinar:

a) Su posición relativa, en función del parámetro "a".
b) La distancia en todos los casos.

1º $\vec{d_\pi} = (2,-1,0)$ $\vec{d_r} = (0,1,2)$ $P_r(1,2,0)$

a) $\vec{d_\pi} \cdot \vec{d_r} = (2\ -1\ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{d_r}$ no es $\perp$ $\vec{d_\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ π y r se cortan. y como $P_r \notin \pi \Rightarrow$ Secantes en un punto

b) Si el plano pedido $\pi' \perp \pi \Rightarrow \vec{d_\pi} \parallel \pi'$
Si $r \subset \pi' \Rightarrow \vec{d_r} \parallel \pi'$ y $P_r \in \pi'$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv \boxed{x+2y-z-5=0} \text{ simplificado.}$$

c) Si r' pedida corta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{AP_r} = (3, 1+2\lambda, \lambda) \parallel r'$.

Como $r' \parallel \pi \Rightarrow \vec{d_{r'}} \perp \vec{d_\pi} \Leftrightarrow (3, 1+2\lambda, \lambda)\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6-1-2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 5/2 \Rightarrow \vec{d_{r'}} = (3, 6, 5/2) \parallel (6,12,5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = -2+6\lambda \\ y = 1+12\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

2º a) Sustituyo las ecuaciones de r en π:

$2(1-2t) - (2-2t) + 2(1+t) + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 5$ ¡! $\Rightarrow$ no tienen nada en común, son paralelos.

b) $d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \dfrac{|2-2+2+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{9}} = \underline{\underline{\dfrac{5\sqrt{9}}{9}}}$ u $\qquad P_r = (1,2,1)$

c) Hallo la recta $s \perp \pi$ y que pasa por P: $\begin{cases} P(3,2,1) \\ \vec{d_r} = \vec{d_\pi} = (2,-1,2) \end{cases}$

$$s = \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$. Calculo $M = \pi \cap s$.

Sustituyo las ecuaciones de s en π:

$$2(3+2\lambda)-(2-\lambda)+2(1+2\lambda)+3=0 \Rightarrow 9\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

$\Rightarrow M(1,3,-1)$. El simétrico de P respecto a π es P' que cumple: $\dfrac{P+P'}{2}=M \Rightarrow$ Si $P'(x,y,z)$:

$$\left(\frac{x+3}{2},\frac{y+2}{2},\frac{z+1}{2}\right)=(1,3,-1) \Rightarrow x=-1,\ y=4,\ z=-3$$

$$\boxed{P'(-1,4,-3)}$$

3° $\vec{d_r}(1,1,1)$, $\vec{d_s}(1,1,0)$, $P_r(1,1,0)$, $P_s(1,0,3)$

a) $\overrightarrow{P_rP_s}=(0,-1,3)$: $\det\{\vec{d_r},\vec{d_s},\overrightarrow{P_rP_s}\}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&-1&3\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ r y s se cruzan

b) determino $\pi \equiv \begin{cases} P_r(1,1,0) \\ \vec{d_r}=(1,1,1) \\ \vec{d_r}\times\vec{d_s}=(-1,1,0)\end{cases}$ y $\pi' \equiv \begin{cases} P_s(1,0,3) \\ \vec{d_s}(1,1,0) \\ \vec{d_r}\times\vec{d_s}=(-1,1,0)\end{cases}$

$$\vec{d_r}\times\vec{d_s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=(-1,1,0)$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z\\ 1&1&1\\ -1&1&0\end{vmatrix}=0 \qquad \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3\\ 1&1&0\\ -1&1&0\end{vmatrix}=0$$

$\pi: x+y-2=0$ $\qquad$ $\pi': z-3=0$

La perpendicular común es: $\begin{cases} x+y-2=0 \\ z-3=0\end{cases}$

4º

a) $\text{ang}(r,\pi)$: $\quad \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\vec{d_r}\cdot\vec{d_\pi}}{\|\vec{d_r}\|\cdot\|\vec{d_\pi}\|} = \left|\dfrac{(1,2,-3)\cdot(2,-1,1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}\right| = \dfrac{|-3|}{\sqrt{84}} = \dfrac{3}{\sqrt{84}}$

$r\begin{cases}-2x+y-1=0\\ 3x-z-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{Si } x=\lambda\\ y=+1+2\lambda\\ z=3-3\lambda\end{cases} \Rightarrow \vec{d_r}(1,2,-3)$

$\Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\dfrac{3}{\sqrt{84}}\right) = 19^\circ\, 6'\, 24''$

b) $d(P,r) = \dfrac{\|\vec{PA}\times\vec{d_r}\|}{\|\vec{d_r}\|} = \dfrac{\sqrt{131}}{\sqrt{14}} = 3'06\ u$

$A(0,1,3) \Rightarrow \vec{PA}(-1,1,4) \Rightarrow \vec{PA}\times\vec{d_r} = \begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix} = (-11, 1, -3)$

c) $d(P,\pi) = \dfrac{|2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\ u$

5º Como r viene dada por dos planos, voy a estudiar el

a) sistema $\begin{cases} x+y-z=a\\ x+2y+az=0\\ x-2y \quad =0\end{cases} \quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$; $|A| = 3a+4 \to 3a+4=0$
$a=-4/3$.

Si $a\neq -4/3 \Rightarrow rg\,A = 3 = rg\,A^* \Rightarrow SCD \Rightarrow$ Se cortan en un punto.

Si $a=-4/3 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg\,A<3$. $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rg\,A=2$.

$rg\,A^* = rg\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -4/3\\ 1 & 2 & -4/3 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}1 & 1 & -4/3\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rg\,A^*=3$

el sistema es incompatible $\Rightarrow r \parallel \pi$.

b) Si $a\neq -4/3 \Rightarrow d(r,\pi)=0$
Si $a=-4/3 \to d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \dfrac{|0+0-0-(-4/3)|}{\sqrt{3}} = \dfrac{4/3}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}\ u$
$P_r(0,0,0)$