

1º) Dadas las rectas $r: \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=1 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x-y=1 \\ x+z=u \end{cases}$.

- Estudiar la posición relativa de ambas. (1'25)
- Para un valor de "u" tal que r y s se corten, halla la ecuación implícita del plano π que contiene a "r" y a "s". (1'25)

2º) Dados el plano $\pi: x+y=3$ y la recta $r: \begin{cases} x+ay=1 \\ y-3z=0 \end{cases}$

- ¿Existe $a \in \mathbb{R}$ de modo que $r \parallel \pi$? (0'75)
- ¿Existe $a \in \mathbb{R}$ de modo que $r \perp \pi$? (0'75)
- Para $a=1$ dar la ecuación implícita de un plano π' que contenga a "r" y sea perpendicular a π . (1'0)

3º) Dadas las rectas $r: \frac{x+1}{1} = -y+2 = \frac{z-1}{1}$ y $s: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$

- Estudiar la posición relativa de ambas. (1'25)
- Hallar la distancia entre "r" y "s". (1'25)

4º) Dados el punto $P(1,0,0)$ y la recta $r: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-1 \end{cases}$

- Hallar la recta que pasa por P y está perpendicularmente a "r". (1'5)
- Calcular la distancia del punto P a la recta "r". (1)

1) Posición relativa: estudio el sistema $\left. \begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x-z=1 \\ x-y=1 \\ x+z=m \end{array} \right\}$

$$a) \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{array} \right) = 3 \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{array} \right|_{C_1-C_2} = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{array} \right| =$$

$$= 1 \cdot A_{12} = - \left| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{array} \right| = - [1 - 2 + 2m] = 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

* Si $m \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{rg} \Delta = 3 \neq \operatorname{rg} \Delta^* = 4 \Rightarrow \text{S.I.} \Rightarrow \gamma$ como

además $\operatorname{rg} \Delta > 2 \Rightarrow r$ y s se cruzan.

* Si $m = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{rg} \Delta = \operatorname{rg} \Delta^* = 3 \Rightarrow \text{S.C.D.} \Rightarrow \underline{\text{se cortan en lph.}}$

$$b) \text{ se cortan si } m = \frac{1}{2} \Rightarrow r: \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$$

$$y \quad s: \begin{cases} x-y=1 \\ x+z=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow s: \begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=\frac{1}{2}-t \end{cases} \Rightarrow \text{Luego } \pi \equiv \begin{cases} P_r(0,0,-1) \\ \vec{d_r}(1,-1,2) \\ \vec{d_s}(1,1,-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} x & y & z+1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{-x + 3y + 2z + 2 = 0}$$

$$(20) \quad \vec{n}_\pi = (1, 1, 0) \quad d_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3a, 3, 1)$$

$$a) \quad r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow (-3a, 3, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3a + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$$

$$b) \quad r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{d}_r \parallel \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \frac{-3a}{1} = \frac{3}{1} \neq \frac{1}{0} \text{ ¡¡IMPOSIBLE!!}$$

$$c) \quad \text{Para } a=1: r \parallel \pi. \text{ Como } r \subset \pi': \begin{cases} P_r(1, 0, 0) \in \pi' \\ \vec{d}_r(-3, 3, 1) \parallel \pi' \end{cases}$$

$$\text{Como adem\'as } \pi \perp \pi' \Rightarrow \vec{n}_\pi = (1, 1, 0) \parallel \pi'$$

$$\text{En consecuencia } \pi' = \begin{cases} P_r(1, 0, 0) \\ \vec{d}_r(-3, 3, 1) \\ \vec{n}_\pi(1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x + 1 + y - 6z = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - y + 6z - 1 = 0}$$

$$(30) \quad P_r(-1, 2, 1) \quad \text{ojo: } \frac{x+1}{1} = -y+2 = \frac{z-1}{1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

$$a) \quad \vec{d}_r(1, -1, 1)$$

$$P_s(0, 1, 3) \Rightarrow \{ \vec{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s \} =$$

$$\vec{d}_s(2, -1, 1)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 2 - 4 - 1 - 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{se cruzan}}$$

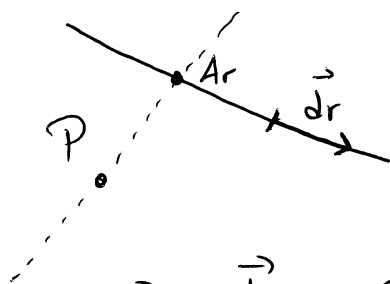
$$\text{pues } \vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s.$$

$$b) \quad d(r, s) = \frac{|\{ \vec{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s \}|}{\|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\|} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ u}}$$

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 1, 1) \Rightarrow \|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\| = \sqrt{2}$$

30

a)



Hay dos modos de hacerlo:

$$1^o) \vec{u} = \vec{PAr} = Ar - P = (2\lambda - 1, 3 + \lambda, -1)$$

Como deben cortarse perpendicularmente:

$$\vec{u} \perp \vec{dr} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{dr} = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1, 3 + \lambda, -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda - 2 + 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 5\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \left(-\frac{2}{5} - 1, 3 - \frac{1}{5}, -1\right) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, -1\right) \parallel (-7, 14, -5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{la recta pedida es: } \boxed{\frac{x-1}{-7} = \frac{y-0}{14} = \frac{z-0}{-5}}$$

$$2^o) \text{ otro modo: determino el plano } \pi \perp r \text{ y que pase por } P: \begin{matrix} \vec{n}_\pi = \vec{dr} = (2, 1, 0) \\ P(1, 0, 0) \end{matrix} \Rightarrow \pi: 2(x-1) + 1 \cdot y + 0z = 0$$

$$\boxed{2x + y - 2 = 0}$$

Halla la intersección de r con π :

$$2(2\lambda) + (3 + \lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 3 + \lambda - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/5 \text{ con lo que obtengo } Ar \text{ y todo igual.}$$

$$b) d(P, r) = \frac{\|\vec{ArP} \times \vec{dr}\|}{\|\vec{dr}\|} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{155}{5}} \text{ u}$$

$$\vec{ArP} = (1, -3, 1)$$

$$Ar(0, 3, -1)$$

$$P(1, 0, 0)$$