1º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & si\ x < 0 \\ x^2 . e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcular el límite en el infinito y en el menos infinito.
b) Estudia la continuidad.
c) Halla la función derivada donde exista.

2º) Enuncia el Teorema de Bolzano. Aplícalo para demostrar que la ecuación $cosx = x^2 - 1$ tiene al menos una solución. Justifica que alguna de las soluciones de esa ecuación es negativa.

3º) Calcula las integrales siguientes:

$$a)\ \int \frac{3x}{x^2+x-2} dx \qquad b)\ \int \frac{2x+5}{x^2+2} dx$$

$$c)\ \int (x^2+3). lnx. dx \qquad d)\ \int x. \sqrt{x-1}\ dx$$

4º) Halla el área de la región limitada por la función $f(x) = 1 - x^2$, las rectas x=0 , x=2 y el eje OX. Haz previamente un esbozo de la región.

5º) Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - x+1$ y la recta tangente a ella en x=1. Haz previamente un esbozo de la región pedida.

1º) a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \infty \cdot 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}.$

L'Hopital: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (a + \ln(1-x)) = a + \infty = \infty.$

b) Si $x \neq 0 \Rightarrow f(x)$ es continua. Si $x = 0$, veamos:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (a + \ln(1-x)) = a$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^2 \cdot e^{-x}) = 0$

$\Rightarrow$ Si $a = 0$ es continua en $x = 0$

c) Si $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 2xe^{-x} - x^2e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Veamos en $x = 0$.

Como $a = 0$ (necesario para ser continua), calculamos $f'(0^-)$, $f'(0^+)$:

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1-x} = -1.$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = 0$

$\Rightarrow$ En $x = 0$ no es derivable.

2º) Sea $H(x) = \cos x - x^2 + 1$. $H(0) = 2$ $H(\pi) = -\pi^2 \Rightarrow$ Aplicando el teorema de Bolzano a $H(x)$, que es continua, en el intervalo $[0,\pi] \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, c \in (0,\pi): H(c) = 0 \Rightarrow c \in (0,\pi)$ es solución de $\cos x = x^2 - 1$.
Si elegimos $[-\pi, 0]$ ocurre lo mismo $\Rightarrow$ hay alguna solución negativa.

3º) a) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{3x}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\right)dx = (*)$

$\Rightarrow \quad 3x = A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \to -6=-3B \to B=2 \\ x=1 \to 3=3A \to A=1. \end{cases}$

$\displaystyle (*) = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx = \underline{Ln\,|x-1| + 2\,Ln\,|x+2| + C}.$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+2}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{5}{x^2+2}\,dx = Ln\,|x^2+2| + 5\int \frac{1}{x^2+2}\,dx =$

$\displaystyle = Ln\,|x^2+2| + 5\cdot \int \frac{1/2}{\frac{x^2}{2}+1}\,dx = Ln\,|x^2+2| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt2}\right)^2+1}\,dx =$

$\displaystyle = Ln\,|x^2+2| + \frac{5}{2}\sqrt2 \int \frac{1/\sqrt2}{\left(\frac{x}{\sqrt2}\right)^2+1}\,dx = \underline{Ln\,|x^2+2| + \frac{5\sqrt2}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt2}\right) + C}$

c) $\displaystyle\int (x^2+3)\ln x\,dx = \ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}+3x\right) - \int\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$

$dv = (x^2+3)dx \to v = \frac{x^3}{3}+3x$

$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\,dx \to dx = x\cdot du$

$\displaystyle = \ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}+3x\right) - \int\left(\frac{x^2}{3}+3\right)dx =$

$\displaystyle = \underline{\ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}+3x\right) - \frac{x^3}{9} - 3x + C}$

d) $\displaystyle\int x\cdot\sqrt{x-1}\cdot dx = \int (t^2+1)\cdot t\cdot 2t\,dt = \int (2t^4+2t^2)\,dt = \frac{2t^5}{5}+\frac{2t^3}{3} =$

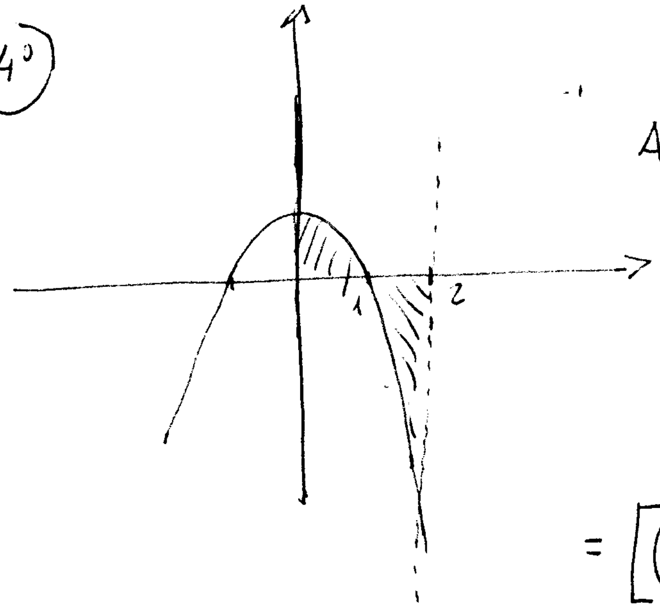
Cambio $x-1=t^2 \to x=t^2+1$

$dx = 2t\cdot dt$

$\displaystyle = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 = \frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1} + \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}$

$\displaystyle = \underline{\sqrt{x-1}\cdot\left(\frac{2(x-1)^2}{5}+\frac{2(x-1)}{3}\right) + C}$

4°



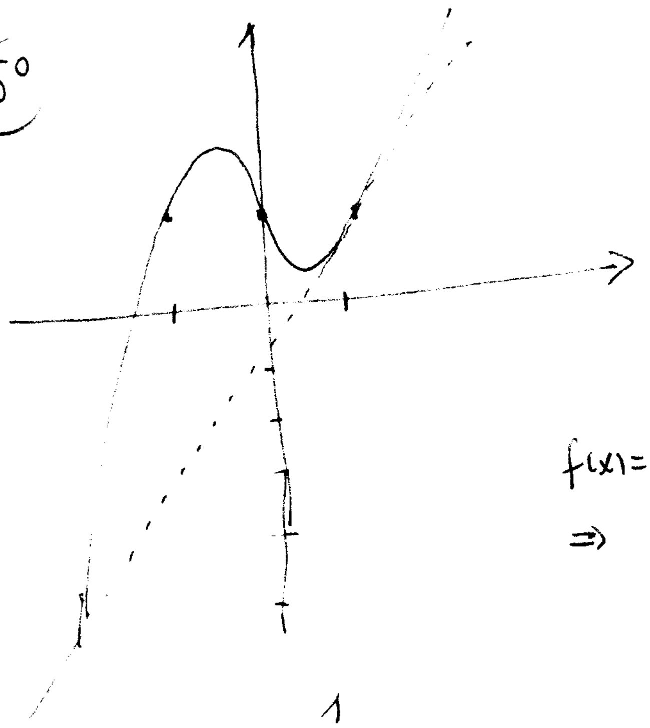
$$A = \int_0^1 (1-x^2)\,dx - \int_1^2 (1-x^2)\,dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(1-\frac{1}{3}\right) - 0\right] - \left[\left(2-\frac{8}{3}\right) - \left(1-\frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3} - \left[-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2\ u^2$$

5°



R. TANGENTE: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 2$

$y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 1.$

$f(x) = \text{TANG.} \Rightarrow x^3 - x + 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 1$ doble

$x = -2.$

$$A = \int_{-2}^{1} (x^3 - x + 1) - (2x-1)\,dx = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{12}{2} - 4\right)\right] = \left[\left(\frac{3}{4}\right) - (-6)\right] =$$

$$= \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}\ u^2.$$