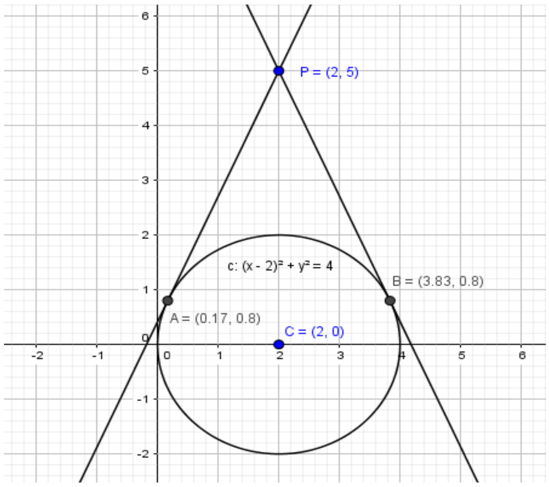
1. Sea la circunferencia de centro $(2,0)$ y radio 2 . Sea el punto $P(2,5)$. Obtener los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por P . (Ayuda: si dibujas primero la circunferencia, la posición del punto P respecto al centro puede facilitar los cálculos).

La ecuación de la circunferencia resulta → $(x-2)^2+y^2=4$.

La representamos en Geogebra, junto al punto $P(2,5)$ y a las rectas tangentes.



El punto $P(2,5)$ se encuentra sobre la vertical del centro de la circunferencia, por lo que los puntos de tangencia serán simétricos respecto la recta vertical $x=2$, como puede apreciarse en la imagen.

Sabemos que la distancia del punto P a cada punto de tangencia coincide con la raíz cuadrada de la potencia. Calculemos la potencia del punto.

$$Pot(P)=d(P,C)^2-r^2$$

$d(P,C)=\sqrt{(2-2)^2+(5-0)^2}=5u$ → Que podíamos deducir viendo la gráfica superior

$$r=2 \rightarrow Pot(P)=5^2-2^2=21$$

La distancia de P a cada punto de tangencia será $\sqrt{21}$. Si llamamos a uno de los puntos de tangencia $A(x,y)$ cumplirá entonces:

$$D(P,A)=\sqrt{21} \rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}=\sqrt{21} \rightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=21$$

Además el punto $A(x,y)$ cumple que dista del centro de la circunferencia una distancia igual al radio. Es decir, el punto $A(x,y)$ satisface la ecuación de la circunferencia.

$$D(C,A)=r \rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=2 \rightarrow (x-2)^2+y^2=4$$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{Bmatrix}(x-2)^2+(y-5)^2=21\\(x-2)^2+y^2=4\end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow (y-5)^2-y^2=17$$

$$y^2+25-10y-y^2=17 \rightarrow 8=10y \rightarrow y=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

La coordenada horizontal resulta → $(x-2)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=4 \rightarrow x=0{,}17 \quad , \quad x=3{,}83$

Los puntos solución son $A(0{,}17\,,0{,}8)$ y $A(3{,}83\,,0{,}8)$.

2. Sea la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y+3=0$. Determinar si los siguientes puntos son externos, internos o pertenecientes a la circunferencia.

a) $(3,0)$

b) $(1,-2)$

c) $(3,1)$

La forma más directa de saber la posición relativa de un punto respecto a una circunferencia es comparar la distancia del punto al centro con el valor del radio.

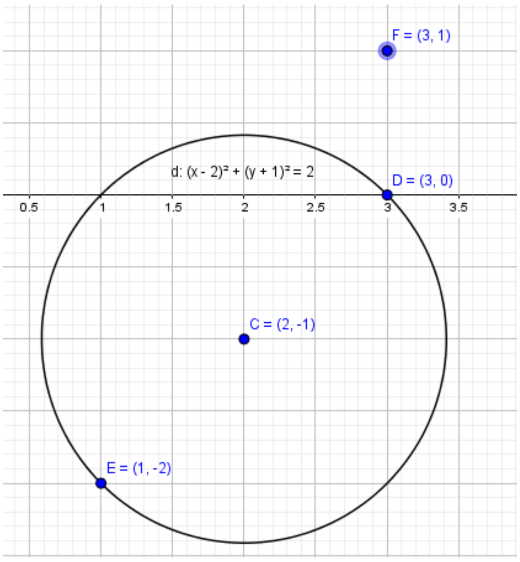
Comparando $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ con la fórmula general $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ como hemos explicado en clase y desarrollado en varios ejercicios, concluimos:

$$C(2,-1)$$
$$r=\sqrt{2}$$

a) $P(3,0) \rightarrow d(P,C)=\sqrt{(2-3)^2+(-1+0)^2}=\sqrt{2}=r$ → punto perteneciente a la circunferencia

b) $P(1,-2) \rightarrow d(P,C)=\sqrt{(2-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}=r$ → punto perteneciente a la circunferencia

c) $P(3,1) \rightarrow d(P,C)=\sqrt{(2-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}>r$ → punto exterior



6. Halla la ecuación de la elipse centrada en el oriegn de coordenadas que pasa por $(0,4)$ y excentricidad $e=\frac{3}{5}$

La ecuación general de la elipse centrada en el origen es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Suponemos eje mayor paralelo al eje horizontal. Cuando tengamos la solución, verificaremos si la hipótesis es cierta o si, en cambio, el eje mayor es paralelo al eje vertical.

Necesitamos determinar dos parámetros: el valor de los semiejes. Por lo tanto, necesitamos dos condiciones.

Si la elipse pasa por $(0,4)$ $\rightarrow$ $\frac{0}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$ $\rightarrow$ $b=4$

Por definición $e=\frac{c}{a}$. Si el enunciado afirma $e=\frac{3}{5}$ $\rightarrow$ $\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ $\rightarrow$ $c=\frac{3}{5}a$

Toda elipse cumple la condición $a^2=b^2+c^2$ $\rightarrow$ $a^2=16+\frac{9}{25}a^2$ $\rightarrow$ $a=5$

Quedando la elipse solución $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Con el eje mayor paralelo al eje horizontal.

8. La distancia focal de una elipse es 4. Un punto de la elipse dista de sus focos 2 y 6, respectivamente. Calcular la ecuación de dicha elipse si el centro coincide con el origen de coordenadas.

Si la distancia focla es 4 → $4=2c$ $\rightarrow$ $c=2$

La suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos coincide con el eje mayor. Por lo tanto:

$$2+6=2a \quad \rightarrow \quad a=4$$

De la relación que cumple toda elipse → $a^2=b^2+c^2$ $\rightarrow$ $16=b^2+4$ $\rightarrow$ $b=+\sqrt{12}$

La ecuación de la elipse solución resulta (suponiendo eje mayor paralelo al eje horizontal):

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

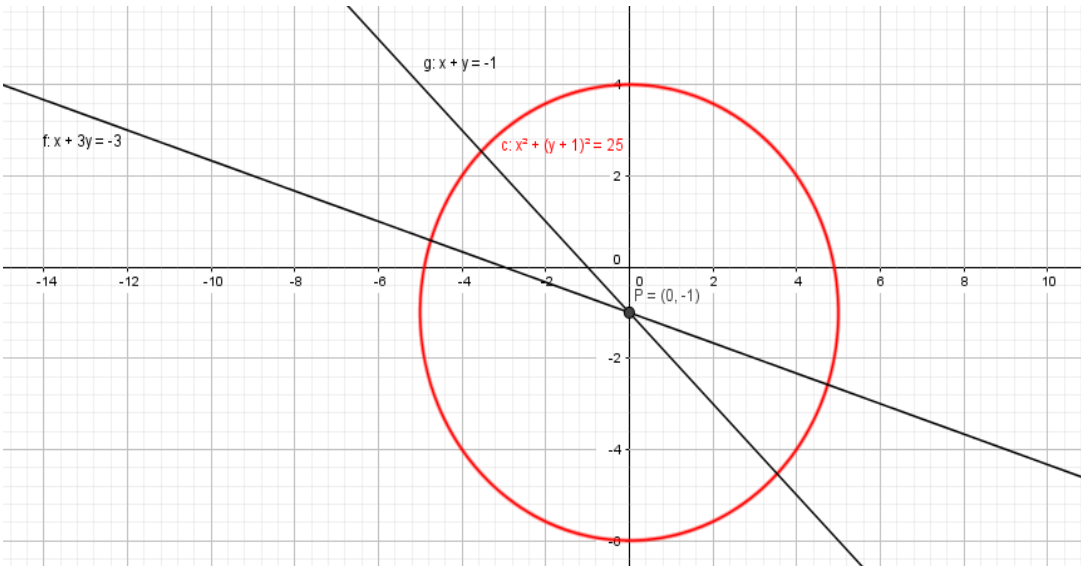
7. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de la rectas $x+3y+3=0$, $x+y+1=0$ y su radio es igual a 5 .

La intersección de las rectas se consigue resolviendo el sistema de ecuaciones formada por ambas rectas.

$\left\{\begin{matrix} x+3y+3=0 \\ x+y+1=0 \end{matrix}\right\}$ → Restamos ambas ecuaciones → $2y+2=0$ → $y=-1$ --> $x=0$

El punto de corte es $P(0,-1)$, por lo que la circuenferencia centrada en este punto y de radio 5 resulta:

$$x^2+(y+1)^2=25$$



8. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la de ecuación $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ y que pasa por el punto $(-3,4)$.

Debemos obtener el centro de $x^2+y^2-6x+2y-6=0$, ya que será el mismo que el centro de la circunferencia solución. Comparamos con la ecuación general de una circunferencia

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

$$x^2+x_0^2-2x_0x+y^2+y_0^2-2y_0y=r^2 \rightarrow x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

Comparamos término a término con la circunferencia del enunciado.

$$-6=-2x_0 \rightarrow x_0=3$$

$$2=-2y_0 \rightarrow y_0=-1$$

El centro resulta $P(x_0\,y_0)=(3,-1) \rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=r^2$

Para obtener el radio imponemos que la circunferencia pase por el punto $(-3,4)$. Es decir.

$$(-3-3)^2+(4+1)^2=r^2 \rightarrow 36+25=r^2 \rightarrow r=+\sqrt{61}$$

La circunferencia solución resulta → $(x-3)^2+(y+1)^2=61$