1. Expresa la siguientes rectas.

a) Ecuación continua y punto-pendiente de la recta que pasa por $A(3,2)$ **y con vector director** $\vec{v}=(1,4)$ **.**

b) Ecuación canónica que pasa por $A(5,0)$ **y** $B(0,4)$ **.**

c) Ecuación paramétrica que pasa por $A(2,1)$ **y de pendiente** $m=\frac{3}{5}$ **.**

a) La ecuación continua será → $\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}$ → $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{4}$

Y la punto pendiente → $4=\frac{y-2}{x-3}$

b) Ya tenemos los puntos de corte con los ejes para obtener la ecuación canónica:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \rightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$$

c) De la pendiente podemos obtener las componentes de un vector director:

$$m=\frac{u_y}{u_x} \rightarrow \frac{3}{5}=\frac{u_y}{u_x} \rightarrow u_x=5 \quad , \quad u_y=3$$

Y la ecuación paramétrica nos queda → $\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \end{Bmatrix}$ → $\begin{Bmatrix} x=2+5\cdot\lambda \\ y=1+3\cdot\lambda \end{Bmatrix}$

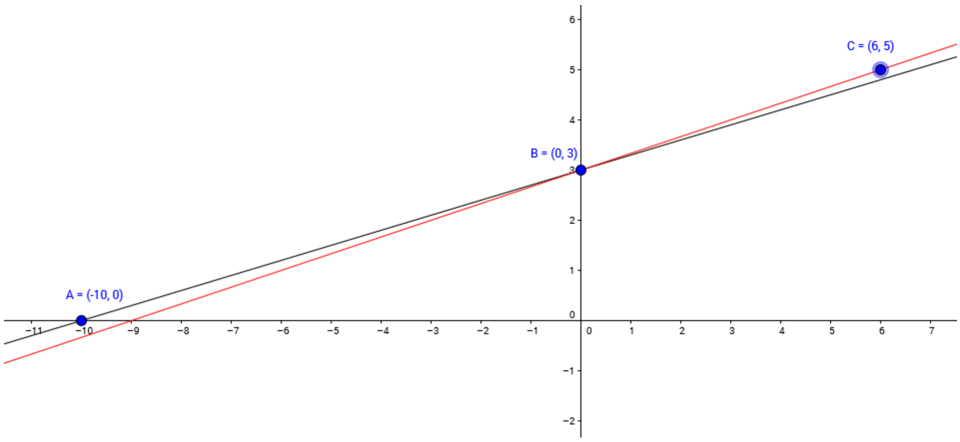
3. ¿Están alineados los puntos $A(-10,0)$, $B(0,3)$ y $C(6,5)$?

Tres puntos están alineados si pertenecen a la misma recta.
Estos podemos probarlo de muchas maneras. Una forma es la siguiente: si la pendiente de la recta que pasa por A y B es igual a la pendiente de la recta que pasa por B y C , ambas rectas serán coincidentes por pasar ambas por B y tener la misma pendiente.
Recordamos que la pendiente de una recta que pasa por dos puntos conocidos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Por lo tanto:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-0}{0+10}=\frac{3}{10}$$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{5-3}{6-0}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Ambas pendientes no son iguales, por lo tanto no están alineados.
Si pintamos los puntos con Geogebra, veremos gráficamente que no pertenecen a la misma recta.

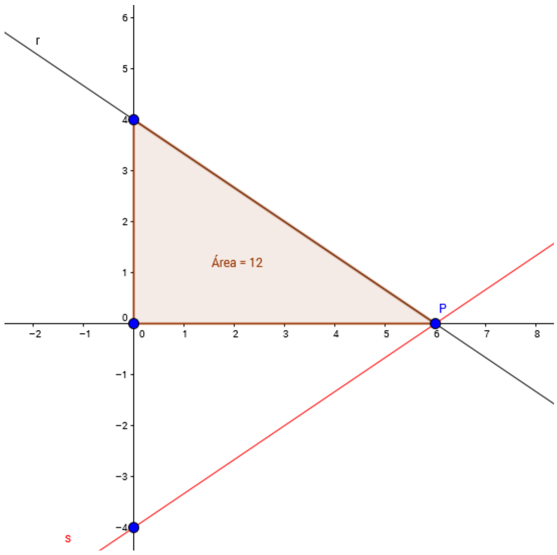


4. Halla las ecuaciones generales de las posibles rectas que, pasando por el punto $P(6,0)$, formen con los ejes cartesianos un triángulo de 12 unidades cuadradas.

Necesitamos conocer los puntos de corte de la recta con los ejes cartesianos. Para eso, usamos la ecuación canónica de la recta.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Donde $(a,0)$ es el punto de corte con el eje horizontal y $(0,b)$ el punto de corte con el eje vertical. En la siguiente gráfica podemos hacernos una idea de las dos rectas solución.



Es inmediato ver que el punto de corte $(a,0)=(6,0)$. Por lo tanto → $a=6$.
Si el área es $12u^2$, por la fórmula del área de un triángulo:

$$12=\frac{a\cdot b}{2} \rightarrow 12=\frac{6\cdot b}{2} \rightarrow 12=3\cdot b \rightarrow b=4$$

Y una de las rectas tendría por ecuación → $r:\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1 \rightarrow 2x+3y-12=0$

Si consideramos que la recta corta con el semieje negativo vertical, una segunda solución sería → $s:\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}=1 \rightarrow 2x-3y-12=0$

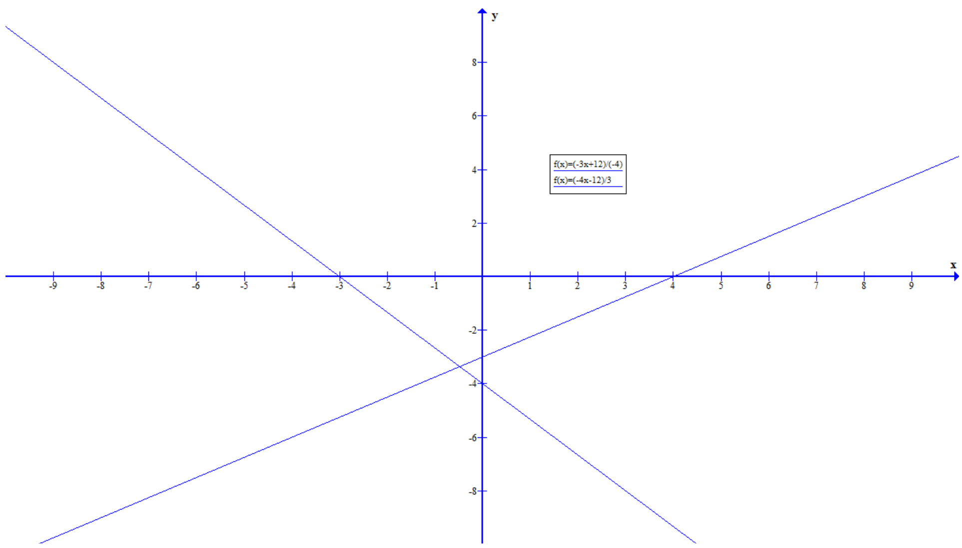
1. Sean las rectas $r: 3x-4y-12=0$ y $s: 4x+3y+12=0$. Represéntalas gráficamente y halla sus pendientes.

Obtenemos la forma explícita de la recta para facilitar la representación y la obtención de la pendiente.

$$r: y=\frac{-3x+12}{-4} \rightarrow r: y=\frac{3}{4}\cdot x-3 \rightarrow m_r=\frac{3}{4}$$

$$s: y=\frac{-4x-12}{3} \rightarrow s: y=\frac{-4}{3}\cdot x-4 \rightarrow m_s=\frac{-4}{3}$$

Representándolas gráficamente en Graph:



1. Expresa la siguientes rectas.

a) Ecuación general que pasa por $A(2,1)$ y $B(3,5)$.

b) Ecuación paramétrica que pasa por $B(4,-1)$ y de vector director $\vec{v}=(2,5)$.

c) Ecuación paramétrica de la recta $r: x-4y+8=0$.

a) Un vector director será $\vec{AB}=(1,4)$. Por lo tanto:

$$A=u_y=4$$

$$B=-u_x=-1$$

La ecuación general o implícita de la recta será $Ax+By+C=0$:

$$4x-y+C=0$$

El factor C lo obtenemos sustituyendo en la recta un punto que sabemos que pertenece a la recta, por ejemplo $A(2,1)$.

$$4\cdot2-1+C=0 \quad \rightarrow \quad C=-7$$

Por lo tanto:

$$4x-y-7=0$$

b) La ecuación parámetrica es fácil de obtener, ya que tenemos un punto y un vector director:

$$\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x=4+\lambda\cdot2 \\ y=-1+\lambda\cdot5 \end{Bmatrix}$$

c) Tenemos la ecuación general, de donde podemos obtener las coordenadas de un vector director:

$$r: x-4y+8=0$$

De donde:

$$A=1=u_y$$

$$B=-4=-u_x \quad \rightarrow \quad u_x=4$$

Y podemos obtener un punto que pertenezca a la recta dando valores a la recta $r: x-4y+8=0$. Por ejemplo:

$$x=0 \quad \rightarrow \quad y=2$$

Y la ecuación paramétrica nos queda:

$$\begin{Bmatrix} x=0+\lambda\cdot4 \\ y=2+\lambda \end{Bmatrix}$$

2. Sea r la recta que, pasando por $A(-2,1)$, forma un ángulo de 45º con el semieje positivo de abscisas.

Sea s la recta que, pasando por $P(5,-2)$, forma un ángulo de 135º con el semieje positivo de abscisas.

Escribe sus ecuaciones generales y paramétricas. Halla el punto de intersección de ambas rectas.

a) Obtenemos la pendiente de la recta $r \rightarrow m_r = tg\ (45°) = 1$

La ecuación punto pendiente es $\rightarrow$ $m = \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)}$; $\quad 1 = \frac{y-1}{x-(-2)}$; $\quad x+2 = y-1$

Quedando una ecuación general $\rightarrow$ $r: x-y+3=0$

b) Recta $s \rightarrow m_s = tg\,\alpha = tg(135º) = -1$

La ecuación punto pendiente $\rightarrow$ $m = \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)}$; $\quad -1 = \frac{y-(-2)}{x-5}$; $\quad -x-5 = y+2 \rightarrow$

Su ecuación general $\rightarrow$ $s: x+y-3=0$

c) Ambas recta son perpendiculares, ya que el producto de sus pendientes es -1 . Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones generales de las dos rectas para obtener el punto donde se cortan.

$$\begin{pmatrix} x-y+3=0 \\ x+y-3=0 \end{pmatrix} \qquad x=0 \rightarrow y=3 \rightarrow Punto\ intersección\ (0,3)$$

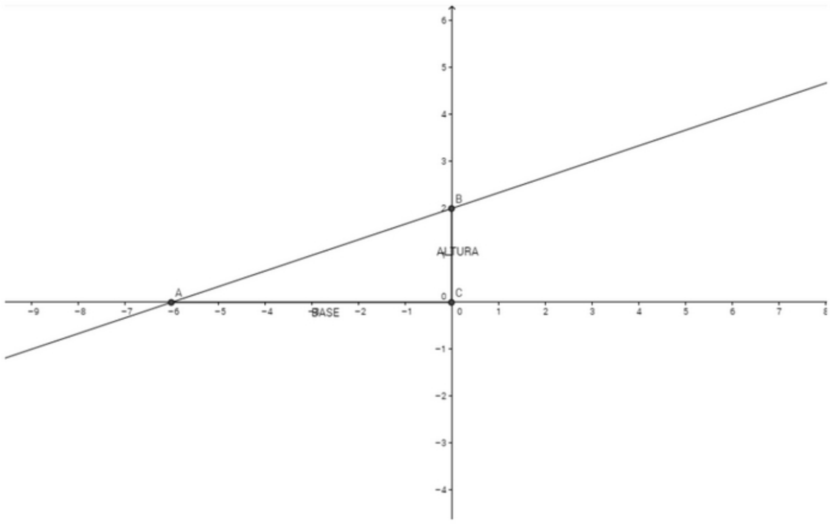
4. Dada la recta $r: x-3y+6=0$, halla el área del triángulo que forma con los ejes cartesianos.

Calculamos los puntos de corte de la recta con los ejes cartesianos.

$$x=0 \rightarrow -3y+6=0 \rightarrow y=2 \rightarrow (0,2)$$
$$y=0 \rightarrow x+6=0 \rightarrow x=-6 \rightarrow (-6,0)$$

Como puede verse en la gráfica, la recta forma con los ejes un triángulo rectángulo de base 6 unidades y de altura 2 unidades. Por lo tanto:

$$\acute{A}rea=\frac{base \cdot altura}{2}=\frac{2\cdot 6}{2}=2u^2$$



3. Halla la ecuación de una circunferencia tal que los puntos $A(2,-1)\, y\, B(4,5)$ formen uno de sus diámetros.

El punto medio del segmento formado por un diámetro será el centro de la circunferencia. Por lo tanto:

$$C: punto\ medio\ \overline{AB}=\left(\frac{2+4}{2},\frac{-1+5}{2}\right)=(3,2)$$

La mitad de la longitud del diámetro $\overline{AB}$ será el radio.

$$di\acute{a}metro = m\acute{o}dulo\ de\ \vec{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(5+1)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40} \rightarrow r=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$$

La ecuación de la circunferencia solución es → $(x-3)^2+(y-2)^2=10$

4. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,0), B(0,2)\, y\, C(2,4)$.

La ecuación general de una circunferencia tiene tres parámetros: las dos coordenadas del centro y el valor del radio.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Imponiendo que la circunferencia pase por los tres puntos del enunciado, tendremos tres condiciones con las que obtener los parámetros buscados.

$$\begin{aligned} A\in circunferencia &\rightarrow x_0^2+y_0^2=r^2 \\ C\in circunferencia &\rightarrow x_0^2+(2-y_0)^2=r^2 \\ B\in circunferencia &\rightarrow (2-x_0)^2+(4-y_0)^2=r^2 \end{aligned}$$

Si restamos la dos primeras ecuaciones → $y_0^2-(2-y_0)^2=0 \;\rightarrow\; y_0=2-y_0 \;\rightarrow\; y_0=1$

Nos queda un sistema 2×2 donde las incógnitas con y_0, r .

$\left\{\begin{matrix} x_0^2+1=r^2 \\ (2-x_0)^2+9=r^2 \end{matrix}\right\}$ → Restamos ambas ecuaciones → $x_0^2+1-(2-x_0)^2-9=0$

$$x_0^2-8-(4+x_0^2-4x_0)=0 \;\rightarrow\; -12+4x_0=0 \;\rightarrow\; x_0=3$$

Y el radio resulta → $9+1=r^2 \;\rightarrow\; r=\sqrt{10}$

Quedando la ecuación de la circunferencia → $(x-3)^2+(y-1)^2=10$

4. Determina los puntos de intersección de la recta $r: x-y+1=0$ y la circunferencia $C: x^2+y^2+4x-4y-1=0$. Dibuja la solución con Geogebra.

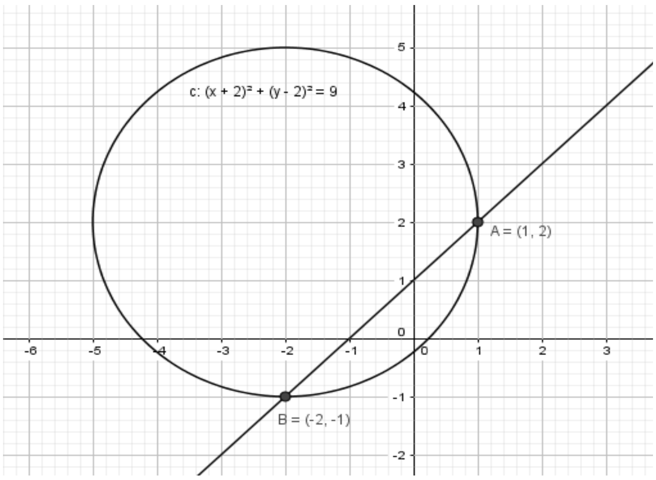
Los puntos de corte son la solución del sistema formado por la circunferencia y la recta.

$$\left\{\begin{array}{c} x-y+1=0 \\ x^2+y^2+4x-4y-1=0 \end{array}\right\}$$ → De la primera $x+1=y$ → Sustituimos en la segunda

$$x^2+(x+1)^2+4x-4(x+1)-1=0 \quad \rightarrow \quad x^2+x^2+1+2x+4x-4x-4-1=0$$
$$2x^2+2x-4=0 \quad \rightarrow \quad x^2+x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad , \quad x=-2$$

Si $x=1 \rightarrow y=2 \rightarrow (1,2)$
Si $x=-2 \rightarrow y=-1 \rightarrow (-2,-1)$

Existen dos puntos de corte de la recta y la circunferencia.



5. Para que valor de m la recta $x-y+m=0$ es tangente a la circunferencia $x^2+y^2=9$. Dibuja la solución con Geogebra, usando un deslizador para el parámetro m .

Una recta es tangente a una circunferencia si el sistema formado por ambas ecuaciones tiene solución única.

$\left\{\begin{matrix} x-y+m=0 \\ x^2+y^2=9 \end{matrix}\right\}$ → En la primera $x+m=y$ → Sustituimos en la segunda $x^2+(x+m)^2=9$

$x^2+x^2+m^2+2mx=9 \quad \rightarrow \quad 2x^2+2mx+m^2-9=0$

Resolvemos → $x=\dfrac{-2m\pm\sqrt{(2m)^2-4\cdot 2\cdot(m^2-9)}}{2\cdot 2}$

Para obtener solución única exigimos que el discriminante de la raíz sea igual a cero.

$4m^2-8m^2+72=0 \quad \rightarrow \quad -4m^2+72=0 \quad \rightarrow \quad m=\pm\sqrt{18}\simeq\pm 4{,}24$