NOMBRE:

Duración: 150 minutos.
La prueba consta de 8 ejercicios.
Los ejercicios deberán resolverse en folios aparte de la presente hoja, en la que únicamente se debe escribir el nombre y apellidos en el lugar habilitado para ello.
No está permitido el uso de fluido corrector o análogo. Igualmente no está permitido el uso de lápiz, goma ni bolígrafo con tinta deleble.
Está permitido el uso de calculadora. Sin embargo en todos los ejercicios se deben indicar y explicar los razonamientos usados para su resolución.

Ejercicio 1. (1.2 puntos)

a) De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, conocemos que $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ y el ángulo que forman es $\alpha=60^{\circ}$. Calcule $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$.

b) El triángulo ABC es equilátero y su lado mide 6 cm. M, N y P son los puntos medios de los lados AB, BC y AC respectivamente. Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MA}$.

c) Si tenemos el vector $\vec{u}=(-5,2)$, determine:

- Un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$.
- Dos vectores de módulo $\sqrt{116}$ y ortogonal al vector $\vec{u}$.

Ejercicio 2. (1 punto)

Dadas las rectas

$$r \equiv ax+(a-1)y-2(a+2)=0$$
$$s \equiv 3ax-(3a-1)y-(5a+4)=0$$

se pide:

a) Calcule a para que sean paralelas y determine la distancia entre ambas.

b) Calcule a para que sean perpendiculares y determine en qué punto se cortan.

Ejercicio 3. (1 punto)

a) Halle la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=1+3t \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x=1-s \\ y=2+s \end{cases}$$

b) Calcule el ángulo que forman dichas rectas.

c) Halle el simétrico del punto $A(1,-3)$ respecto de la recta r.

Ejercicio 4. (1 punto)

Los vértices de un triángulo son los puntos $A(1,0)$, $B(5,-2)$ y $C(3,7)$. Calcule la longitud de la altura del triángulo sobre el lado AB y el área del triángulo.

Ejercicio 5. (1,8 puntos)
Dado el triángulo de vértices $A(1,0)$, $B(4,4)$ y $C(7,0)$,

a) Halle la ecuación de la circunferencia inscrita (esto es, que tiene un único punto en común con cada lado).
b) Una mediana de un triángulo es la recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto, llamado baricentro. Halle el baricentro del triángulo dado.
c) El ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan sus tres alturas. Hállelo también.
d) El circuncentro es el punto que equidista de los tres vértices. Hállelo igualmente.
e) Compruebe que los puntos hallados en los apartados (b), (c) y (d) están alineados. Halle la recta que pasa por ellos (*recta de Euler*).
f) Compruebe si el centro de la circunferencia del apartado (a), esto es, el incentro, está alineado con los tres del apartado anterior que forman la recta de Euler.

Ejercicio 6. (1.5 puntos)
Deduzca las cónicas que describen las siguientes ecuaciones, hallando su ecuación reducida o canónica, indicando todos sus elementos y realizando su representación gráfica del modo más aproximado posible:

a) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
b) $25x^2 - y^2 + 10y - 26 = 0$
c) $y^2 + 2y - 12x + 13 = 0$

Ejercicio 7. (1.25 puntos)
Halle la ecuación general de las rectas tangentes a la circunferencia de centro $C(3,0)$ y radio $r = 3$, y que pasan por el punto $P(9,0)$.

Ejercicio 8. (1.25 puntos)
Deduzca la ecuación de la hipérbola formada por los puntos del plano para los que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a $F(x_0, y_0 + c)$ y $F'(x_0, y_0 - c)$ es igual a la constante $2a$, siendo $a > 0$, justificando todos los pasos.