

Problema 1 (2 puntos) Hallar todos los vectores perpendiculares a $\vec{u} = (-3, -4)$ que tengan módulo 20.

Solución:

Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector perpendicular a $\vec{u} = (-3, -4)$. Lo primero que pensamos es que su producto escalar debe ser cero, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, como el espacio es ortonormal, nos quedaría que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -4) \cdot (x, y) = -3x - 4y = 0$

Es trivial comprobar que, en esta ecuación, para cada valor que apliquemos a una de las variables obtendríamos otro valor para la otra. Me voy a limitar a las soluciones enteras.

Una solución posible sería $x = 4$ e $y = -3$, es decir: $\vec{v} = (4, -3)$.

Otra solución posible sería $x = -4$ e $y = 3$, es decir: $\vec{v} = (-4, 3)$

Claro está, que estos vectores así obtenidos deben ser perpendiculares al vector \vec{u} , lo que nos queda es pasarlos a módulo 20. Para ello voy a seguir dos pasos, primero los pasaré a módulo 1 y luego los pasaré a módulo 20.

Para pasar \vec{v} a módulo 1 aplicamos la siguiente fórmula: $v' = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Obtendríamos los siguientes vectores:

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

$$\vec{v}_2 = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Para pasarlos a módulo 20 lo único que tendremos que hacer es multiplicar por 20: y nos quedaría:

$$\vec{w}_1 = 20 \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) = (16, -12)$$

$$\vec{w}_2 = 20 \cdot \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right) = (-16, 12)$$

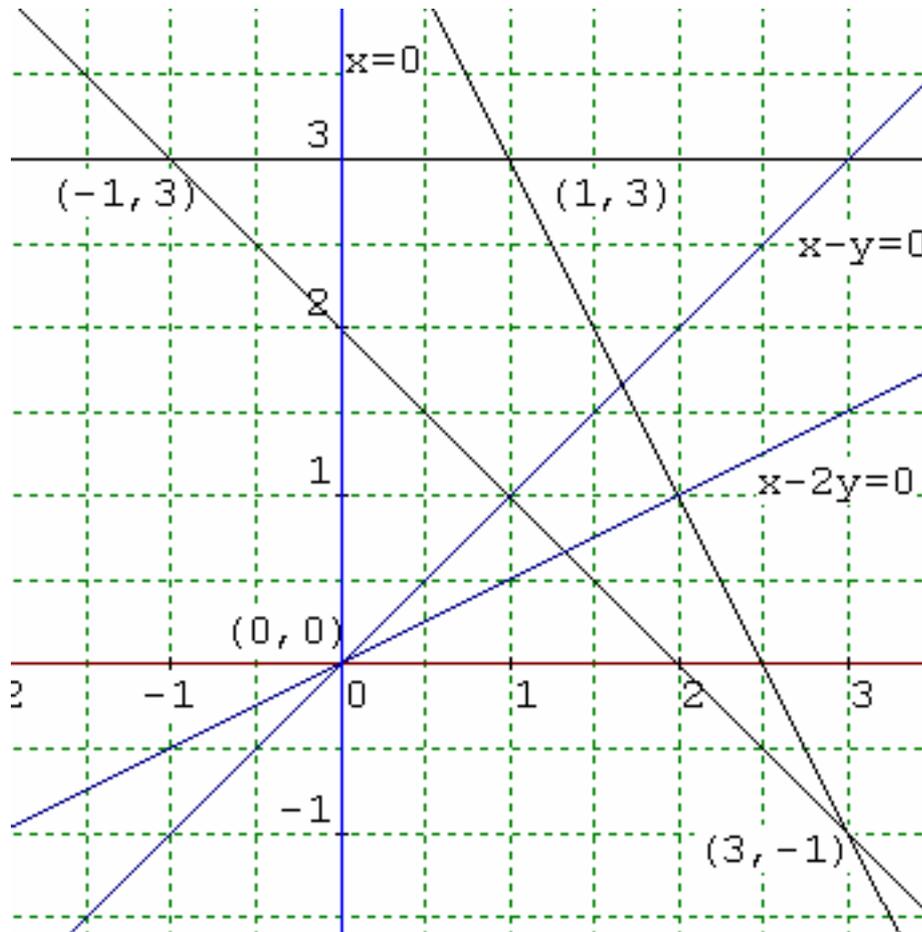
Problema 2 (2 puntos) Dado el triángulo de vértices $A(1, 3)$, $B(3, -1)$, $C(-1, 3)$ halla la ecuación de sus tres mediatrices y comprueba que se cortan en un único punto, llamado circuncentro.

Solución:

Si queremos calcular la mediatriz que separa a dos puntos podemos pensar de la siguiente manera: *la mediatriz entre dos puntos es el conjunto de puntos (x, y) tales que equidistan de los dos.* Es decir, entre los puntos A y B la mediatriz será el conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que $d(P, A) = d(P, B)$. Partiendo de este concepto es bastante sencillo la obtención de estas rectas.

Calculamos la mediatriz que hay entre A y B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} &= \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 &= (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 \\ 4x - 8y &= 0 \implies x - 2y = 0\end{aligned}$$



Calculamos la mediatriz que hay entre B y C , es decir, $d(P, B) = d(P, C)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} &= \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 &= (x+1)^2 + (y-3)^2 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 &= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ -8x + 8y &= 0 \implies x - y = 0 \end{aligned}$$

Calculamos la mediatriz que hay entre C y A , es decir, $d(P, C) = d(P, A)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$

$$4x = 0 \implies x = 0$$

Es decir, las mediatrices serían: $x - 2y = 0$, $x - y = 0$ y $x = 0$. Ahora buscamos el punto de intersección. En este caso es bastante sencillo encontrarle ya que una de las ecuaciones es $x = 0$, y por simple sustitución comprobamos que el punto buscado (el circuncentro) es el origen de coordenadas $O(0, 0)$.

Problema 3 (2 puntos) Calcula la distancia del punto $P(2, 3)$ a la recta r en los siguientes casos:

1. $r : y = 3x - 2$

2. $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$

3. $r : 3x + 4y - 5 = 0$

Solución:

1. $y = 3x - 2 \implies 3x - y - 2 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

= 0,3162

2.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases} \implies t = \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} \implies -x + 1 = 2y - 4 \implies$$

$$x + 2y - 5 = 0 \text{ (Ecuación general de la recta)}$$

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

= 1,3416

3. $3x + 4y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{13}{5} = 2,6$$

Problema 4 (2 puntos) Calcula el ángulo formado por las rectas:

1.

$$r_1 : 3x - y + 1 = 0$$

$$s_1 : 2x + 3y + 4 = 0$$

2.

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \quad r_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$$

Solución:

1. Como las rectas están definidas por su ecuación general, ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|u_1 \cdot u'_1 + u_2 \cdot u'_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} \\ &= 0,2631 \implies \alpha = 74^\circ 44' 42'' \end{aligned}$$

2.

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \implies \lambda = \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} \implies 3x + y - 8 = 0$$

(Ecuación general de la recta)

$$r_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} \implies 2x - 3y - 8 = 0$$

(Ecuación general de la recta)

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|u_1 \cdot u'_1 + u_2 \cdot u'_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} \\ &= 0,2631 \implies \alpha = 74^\circ 44' 42'' \end{aligned}$$

Problema 5 (2 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0$ en el punto $P(-1, 0)$

Solución:

Primero calculamos el centro de la circunferencia, ya que si obtenemos este punto, podremos calcular el vector que partiendo de este punto llega al punto donde queremos hallar la tangente, y este vector será perpendicular a la recta tangente:

$$3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0 \implies x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \cdot x - \frac{5}{3} \cdot y - \frac{2}{3} = 0 \implies$$

$$m = -2 \cdot a \implies \frac{1}{3} = -2 \cdot a \implies a = -\frac{1}{6}$$

$$n = -2 \cdot b \implies -\frac{5}{3} = -2 \cdot b \implies b = \frac{5}{6}$$

Luego el centro de la circunferencia será $C(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$

Esto quiere decir que un vector perpendicular a la recta que nos piden será el vector $\overrightarrow{CP} = \vec{u} = (-1, 0) - (-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) = (-\frac{5}{6}, -\frac{5}{6})$

Luego la ecuación general de la recta será de la forma $-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + Cte = 0$, y teniendo en cuenta que esta recta pasa por el punto $P(-1, 0)$, sustituyendo obtendríamos $-\frac{5}{6} \cdot (-1) - \frac{5}{6} \cdot 0 + Cte = 0 \implies Cte = -\frac{5}{6}$

La recta pedida sería, por tanto, $-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + (-\frac{5}{6}) = 0 \implies x + y + 1 = 0$

