Problema 1 Sean $A(-1,-1)$, $B(3,-2)$ y $C(5,3)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Calcular el cuarto vértice D.

b) La longitud de sus lados.

c) Los ángulos que forman.

d) Su centro.

e) Encontrar un vector de módulo 9 que sea perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1,-1) + (2,5) = (1,4)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(4,-1)| = \sqrt{17}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2,5)| = \sqrt{29}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{3}{\sqrt{17}\sqrt{29}} \Longrightarrow \alpha = 82^{\text{o}}14'5''$ y $\beta = 97^{\text{o}}45'54''$

d) $M\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right) = M(2,1)$

e) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (4,-1)$ puede ser el vector $\overrightarrow{w} = (1,4)$ y tendremos:

$$\overrightarrow{u} = \frac{9}{|\overrightarrow{w}|}\cdot\overrightarrow{w} = \left(\frac{9}{\sqrt{17}}, \frac{36}{\sqrt{17}}\right).$$

Problema 2 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(-1,-1)$, $B(2,0)$ y $C(0,5)$

Solución:

Dada la ecuación general de una circunferencia: $x^2 + y^2 + mx - ny + p = 0$, imponemos que pase por los puntos dados y nos queda

$$\left\{\begin{array}{c} m+n-p-2=0 \\ 2m+p+4=0 \\ 5n+p+25=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = \dfrac{11}{17} \\ \\ n = -\dfrac{67}{17} \\ \\ p = -\dfrac{90}{17} \end{array}\right.$$

La circunferencia buscada es: $x^2 + y^2 + \frac{11}{17}x - \frac{67}{17}y - \frac{90}{17} = 0$

Problema 3 Se pide:

a) Calcular la distancia del punto $A(2, -5)$ a la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{array} \right.$

b) Calcular el ángulo que forman las rectas

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} \text{ y } s : x - 2y + 1 = 0$$

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow x - y - 2 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 + 5 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

b) Tenemos $r : x + 2y + 1 = 0$ y $s : x - 2y + 1 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = -\frac{3}{5} \Longrightarrow \alpha = 126^{o}52'11''$$

Problema 4 Dada la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1}$ encontrar los puntos de ella que distan 5 unidades del origen de coordenadas.

Solución:

La ecuación de una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 5 es $x^2+y^2-25 = 0$. Además $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \end{array} \right.$, sustituyendo estos valores en la circunferencia tenemos $\lambda^2 + 6\lambda - 23 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1,627105745$ y $\lambda = -2,827105745$. Sustituyendo estos valores en la recta obtenemos los puntos:

$$(4.254211490, -2.627105745) \text{ y } (-4.654211489, 1.827105744)$$